Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

CHUYÊN ĐỀ 4:

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

Phương trình vô tỷ, cùng với hệ phương trình là một bài toán hay thường xuyên xuất hiện trong đề thi TSĐH. Bài tập dạng này rất phong phú và đa dạng, đòi hỏi học sinh phải vận dụng linh hoạt biến đổi cơ bản, đến đặt ẩn phụ hay, một số đánh giá nhỏ dựa vào bất đẳng thức, hàm số.
Với đề thi TSĐH thì bài toán theo nhận định chủ quan thì 2 phương pháp cơ bản để các em làm được các bài toán dạng này là biến đổi cơ bản(quan trọng) và đặt ẩn phụ nếu có.
Các phương pháp sẽ được trình bày theo từng dạng toán để các em có thể tiếp cận làm quen, về sau khi đã được tiếp cận từng phương pháp sẽ hình thành cho các em khả năng nhận dạng và tư duy phương pháp giải.
Xin được mở đầu bằng một số bài toán:

Bài 1. Giải bất phương trình sau: $(x^2-3x)\sqrt{2x^2-3x-2}\ge 0(*)$

Lời giải:

$$+(*)\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-3x-2\ge 0\\(x^2-3x)\sqrt{2x^2-3x-2}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x^2-3x-2=0\\\begin{cases}2x^2-3x-2>0\\(x^2-3x)\sqrt{2x^2-3x-2}\ge 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=\frac{-1}{2}\\x=2\end{array}\right.\\\begin{cases}(x>2)\vee(x<\frac{-1}{2})\\x^2-3x\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=\frac{-1}{2}\\x=2\end{array}\right.\\\begin{cases}(x>2)\vee(x<\frac{-1}{2})\\(x\ge 3)\vee(x\le 0)\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=\frac{-1}{2}\\x=2\end{array}\right.\\(x\ge 3)\vee(x<\frac{-1}{2})\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le\frac{-1}{2}\\x=2\\x\ge 3\end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $D=(-\infty,\frac{-1}{2}]\cup\{2\}\cup[3,+\infty)$

Bài 2. Giải bất phương trình sau: $\dfrac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{2(x^2-x+1)}} \geq 1$ (*)

Lời giải:

+ Điều kiện: $x \geq 0$, ta có $1-\sqrt{2(x^2-x+1)} = 1-\sqrt{2(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{2}} \leq 1-\sqrt{\frac{3}{2}} < 0$

Khi đó bất phương trình tương đương với:

$x-\sqrt{x} \leq 1-\sqrt{2(x^2-x+1)} \Leftrightarrow (x-1)-\sqrt{x}+\sqrt{2(x-1)^2+2x} \leq 0$ (1)

+ Ta có $(x-1-\sqrt{x})^2 = (x-1)^2+x-2(x-1)\sqrt{x} \leq 2(x-1)^2+2x$ (do $x-1+\sqrt{x} \geq 0$)

$\Rightarrow \left|x-1-\sqrt{x}\right| \leq \sqrt{2(x-1)^2+2x} \Rightarrow x-1-\sqrt{x}+\sqrt{2(x-1)^2+2x} \geq 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$x-1-\sqrt{x} = \sqrt{2(x-1)^2+2x} \Leftrightarrow x-1+\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $D = \left\{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$

Bài 3. Giải phương trình sau: $2\sqrt[3]{3x-2}+3\sqrt{6-5x}-8=0$(*)

Lời giải:

+ Điều kiện: $x \leq \dfrac{6}{5}$

+ Đặt $u=\sqrt[3]{3x-2}; v=\sqrt{6-5x} \geq 0$

$\Rightarrow \begin{cases} u^3 = 3x-2 \\ v^2 = 6-5x \end{cases} \Rightarrow 5u^3+3v^2 = 5(3x-2)+3(6-5x) = 8$ (1)

Mặt khác ta lại có: $2u+3v-8=0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$u^3+3(\frac{8-2u}{3})^2-8=0 \Leftrightarrow 45u^3+12u^2-96u+120=0$

$\Leftrightarrow (u+2)(45u^2-78u+60)=0 \Leftrightarrow u=-2 \Rightarrow v=4$

Khi đó: $\sqrt[3]{3x-2}=-2 \Leftrightarrow x=-2$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: $x=-2$

Bài 4. Giải phương trình sau: $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$

Lời giải:

Điều kiện: $-\frac{1}{3}\le x\le 6$

Khi đó phương trình được biến đổi thành:[1]

$(\sqrt{3x+1}-4)+(1-\sqrt{6-x})+3x^2-14x-5=0$

$\Leftrightarrow \frac{3x-15}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}}+(x-5)(3x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x-5)(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{1+\sqrt{6-x}}+3x+1)=0 \Leftrightarrow x-5=0$

Do $(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{1+\sqrt{6-x}}+3x+1>0, \forall \frac{-1}{3}\le x\le 6)$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$.

Bài 5. Giải phương trình sau:

$$3\sqrt{2+x}-6\sqrt{2-x}+4\sqrt{4-x^2}=10-3x\,(x\in\mathbb{R})$$

Lời giải:

+ Điều kiện: $-2\le x\le 2$

$+t=\sqrt{2+x}-2\sqrt{2-x} \Rightarrow t^2=2+x+4(2-x)-4\sqrt{4-x^2}=10-3x-4\sqrt{4-x^2}$

[1] Xem phương pháp trục căn thức được trình bày ở dưới

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Rightarrow PT \Leftrightarrow 3t = t^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2+x}-2\sqrt{2-x} \\ \sqrt{2+x}-2\sqrt{2-x}=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{6}{5}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{6}{5}$.

Bài 6. Giải bất phương trình:

$$\sqrt{x+2}+x^2-x-2 \le \sqrt{3x-2}\,(x\in\mathbb{R})$$

Lời giải:

+ Điều kiện: $x \ge \frac{2}{3}$

Khi đó bất phương trình tương đương với:

$$(\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2})+(x^2-x-2) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(2-x)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}+(x-2)(x+1) \le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{-2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}+x+1\right) \le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)f(x) \le 0;\ f(x)=\frac{-2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}+x+1,\ x\ge\frac{2}{3}$$

$$+f'(x)=1+\frac{\frac{1}{\sqrt{x+2}}+\frac{3}{\sqrt{3x-2}}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2})^2}>0$$

$$\Rightarrow f\uparrow \Rightarrow f(x)\ge f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{3}-\sqrt{\frac{3}{2}}>0 \Rightarrow BPT \Leftrightarrow x-2\le 0 \Leftrightarrow x\le 2 \Rightarrow \frac{2}{3}\le x\le 2$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $D=\left[\frac{2}{3},2\right]$

Bài 7. Giải phương trình sau:

$$(13-4x)\sqrt{2x-3}+(4x-3)\sqrt{5-2x}=2+8\sqrt{16x-4x^2-15}\,(x\in\mathbb{R})$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

$+DK:\dfrac{3}{2}\le x\le\dfrac{5}{2}(*)$

$+u=\sqrt{2x-3};v=\sqrt{5-2x}\Rightarrow u^2=2x-3;v^2=5-2x\Rightarrow u^2+v^2=2(1)$

$+13-4x=2v^2+3\,\&\,4x-3=2u^2+3;uv=\sqrt{16x-4x^2-15}$

$\Rightarrow BPT\Leftrightarrow(2v^2+3)u+(2u^2+3)v=2+8uv=u^2+v^2+8uv(do(1))$

$\Leftrightarrow 2uv(u+v)+3(u+v)=(u+v)^2+6uv\Leftrightarrow 2uv(u+v-3)=(u+v)(u+v-3)$

$\Leftrightarrow(u+v-3)(2uv-u-v)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u+v=3\\u+v=2uv\end{array}\right.$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\left[\begin{array}{l}uv=\dfrac{7}{2}(uv\ge0)\\uv=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{16x-4x^2-15}=\dfrac{7}{2}\\\sqrt{16x-4x^2-15}=1\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{16x-4x^2-15}=\dfrac{7}{2}\\\sqrt{16x-4x^2-15}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow x=2$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$

Bài 8. Giải phương trình sau:[2]

$(x+2)(\sqrt{x^2+4x+7}+1)+x(\sqrt{x^2+3}+1)=0(x\in\mathbb{R})$

Lời giải:

$+BPT\Leftrightarrow(x+2)(\sqrt{(x+2)^2+3}+1)+x(\sqrt{x^2+3}+1)=0$

$\Leftrightarrow g(x)=f(x+2)+f(x)=0;f(x)=x(\sqrt{x^2+3}+1)$

$+f'(x)=\sqrt{x^2+3}+1+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+3}}>0\Rightarrow g'(x)=f'(x+2)+f'(x)>0$

[2] Xem phương pháp xét tính đơn điệu của hàm số

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên R, nên nếu phương trình $g(x)=0$ có nghiệm thì đó là nghiệm duy nhất. Nhận thấy $g(-1)=0 \Rightarrow x=-1$ là nghiệm của phương trình.

Bài 9. Giải phương trình sau: $\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0 (x\in\mathbb{R})$

Lời giải:

+ Điều kiện: $\begin{cases} 2x-1\geq 0 \\ x^2-3x+1\leq 0 \end{cases} (*)$

$$+PT \Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=-(x^2-3x+1) \Rightarrow 2x-1=(x^2-3x+1)^2=((x-1)^2-x)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x-1=(x-1)^4-2x(x-1)^2+x^2 \Leftrightarrow (x-1)^4-2x(x-1)^2+(x-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2((x-1)^2-2x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-4x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Thử lại thấy các nghiệm đều thỏa mãn điều kiện (*).

Vậy nghiệm của phương trình là:

$x=1; x=2\pm\sqrt{2}$

Bài 10. Giải phương trình sau:

$2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}$

Lời giải:

$+DK: |x|\leq 2(*)$

$$+PT \Leftrightarrow 4(2x+4)+16(2-x)+16\sqrt{2(4-x^2)}=9x^2+16$$

$$\Leftrightarrow 8(4-x^2)+16\sqrt{2(4-x^2)}=x^2+8x(1)$$

$$+t=\sqrt{2(4-x^2)}\geq 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 4t^2+16t-x^2-8x=0$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{x}{2} \\ t=\dfrac{-x}{2}-4<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow t=\frac{x}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2(4-x^2)}=\frac{x}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 0 \\ 8(4-x^2)=x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

BIẾN ĐỔI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH DƯỚI DẠNG TƯƠNG ĐƯƠNG

Đưa về bình phương hai vế của phương trình, bất phương trình:

<u>Phương trình, bất phương trình cơ bản:</u>

$$\sqrt{A}=\sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A\geq 0 \\ B\geq 0 \\ A=B \end{cases}$$

$$\sqrt{A}=B \Leftrightarrow \begin{cases} B\geq 0 \\ A=B^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{A}\geq B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} B<0 \\ A\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} B\geq 0 \\ A\geq B^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Nếu phương trình có dạng: $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}+\sqrt{k(x)}$ mà có $f(x).h(x)=k(x).g(x)$ thì biến đổi về: $\sqrt{f(x)}-\sqrt{h(x)}=\sqrt{k(x)}-\sqrt{g(x)}$

Phương trình có dạng: $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=\sqrt[3]{C}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lập phương hai vế của phương trình ta được: $A+B+3\sqrt[3]{AB}\left(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\right)=C$, lại có $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=\sqrt[3]{C}$ suy ra phương trình: $A+B+3C\sqrt[3]{AB}=C$ giải phương trình suy ra nghiệm. Sau đó thử lại nghiệm xem thỏa mãn không.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải phương trình sau: $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=2\sqrt{x}+\sqrt{2x+2}$.

Lời giải:

Điều kiện: $x \ge 0$.

Phương trình tương đương với

$2\sqrt{x}-\sqrt{x+3}=\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+2}$

$\Rightarrow 5x+3-2\sqrt{4x^2+12x}=5x+3-2\sqrt{6x^2+8x+2}$

$\Leftrightarrow 4x^2+12x=6x^2+8x+2 \Leftrightarrow x=1$

Thử lại thấy nghiệm $x=1$ thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 2. Giải phương trình: $\sqrt{x+4}-\sqrt{1-x}=\sqrt{1-2x}$

Lời giải:

Điều kiện: $-4 \le x \le \frac{1}{2}$.

Khi đó phương trình tương đương với:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\sqrt{1-x}+\sqrt{1-2x}=\sqrt{x+4} \Leftrightarrow 1-x+1-2x+2\sqrt{(1-x)(1-2x)}=x+4$

$\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(1-2x)}=2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1\geq 0 \\ (1-x)(1-2x)=(2x+1)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -\dfrac{1}{2} \\ 2x^2+7x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$ Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$.

Bài 3. Giải bất phương trình: $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\dfrac{5}{\sqrt{x-3}}$.

<u>Lời giải:</u>

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-16\geq 0 \\ x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 4$.

Khi đó quy đồng mẫu số, bất phương trình tương đương với:

$\sqrt{x^2-16}+x-3>5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-16}\geq 8-x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-16\geq 0 \\ 8-x<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-16>(8-x)^2 \\ 8-x\geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 4 \vee x\leq -4 \\ x>8 \end{cases} \\ \begin{cases} x\leq 8 \\ x>5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>8 \\ 5<x\leq 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow x>5$$

Đối chiếu với điều kiện suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S=(5;+\infty)$.

Bài 4. Giải phương trình: $(x+1)\sqrt{16x+17}=8x^2-15x-23$.

<u>Lời giải:</u>

Điều kiện: $x\geq -\dfrac{17}{16}$.

Khi đó phương trình tương đương với:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$(x+1)\sqrt{16x+17}=(x+1)(8x-23)\Leftrightarrow (x+1)\left(\sqrt{16x+17}-8x+23\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=0\\ \sqrt{16x+17}=8x-23\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ \begin{cases}8x-23\ge 0\\ 16x+17=(8x-23)^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=4\end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện cả hai nghiệm này đều thỏa mãn. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=-1$ và $x=4$.

Bài 5. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2$.

Lời giải:

Để phương trình có nghiệm thì $2x+2\ge 0\Leftrightarrow x\ge -1$.

Khi đó điều kiện của phương trình là:

$$\begin{cases}2x^2+8x+6\ge 0\\ x^2-1\ge 0\\ x\ge -1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x\ge 1\end{array}\right.$$

- Nhận thấy $x=-1$ thỏa mãn phương trình.
- Xét $x\ge 1$, khi đó phương trình tương đương với:

$$\sqrt{(x+1)(2x+6)}+\sqrt{(x+1)(x-1)}=2(x+1)$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2x+6}+\sqrt{x-1}=2\sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow 2x+6+x-1+2\sqrt{(2x+6)(x-1)}=4(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(2x+6)(x-1)}=x-1\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\ge 0\\ 4(2x+6)(x-1)=(x-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow x=1$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=-1$ và $x=1$.

Bài 6. Giải phương trình: $\sqrt{x^2-x-6}+3\sqrt{x}=\sqrt{2\left(x^2+5x-3\right)}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Điều kiện: $x \ge 3$.

Khi đó cả hai vế của phương trình đều không âm, nên bình phương hai vế ta được

$$x^2 + 8x - 6 + 6\sqrt{x\left(x^2 - x - 6\right)} = 2\left(x^2 + 5x - 3\right)$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{x\left(x^2 - x - 6\right)} = x\left(x + 2\right) \Leftrightarrow 6\sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{x}\left(x + 2\right)$$, do $x \ge 3$

$$\Leftrightarrow 36\left(x^2 - x - 6\right) = x\left(x + 2\right)^2 \Leftrightarrow \left(x + 2\right)\left(x^2 - 34x + 108\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 34x + 108 = 0 \Leftrightarrow x = 17 \pm \sqrt{181}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 17 \pm \sqrt{181}$.

Bài 7. Giải bất phương trình: $\dfrac{x^2 - x}{\sqrt{x^4 + 3x^2} - 2x} \le 1$

Lời giải:

Điều kiện: $x \ne 0; x \ne 1$.

- Với $x \in \left(0;1\right) \Rightarrow \sqrt{x^4 + 3x^2} - 2x < \sqrt{x^2 + 3x^2} - 2x = 0$

Khi đó bất phương trình tương đương với:

$x^2 - x \ge \sqrt{x^4 + 3x^2} - 2x \Leftrightarrow x^2 + x \ge \sqrt{x^4 + 3x^2}$, hai vế của bất phương trình không âm nên bình phương hai vế, ta được

$$\Leftrightarrow x^2\left(x + 1\right)^2 \ge x^4 + 3x^2 \Leftrightarrow 2x^2\left(x - 1\right) \ge 0$$; không thỏa mãn $x \in \left(0;1\right)$.

- Với $x > 1$ hoặc $x < 0$ (*) thì $\sqrt{x^4 + 3x^2} - 2x > 0$

Khi đó bất phương trình tương đương với: $x^2 - x \le \sqrt{x^4 + 3x^2} - 2x \Leftrightarrow x^2 + x \le \sqrt{x^4 + 3x^2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + x \le 0 \\ \begin{cases} x^2 + x > 0 \\ \sqrt{x^4 + 3x^2} \ge x^2 + x \end{cases} \end{array}\right. \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} -1 \le x < 0 \\ \begin{cases} x > 1 \vee x < -1 \\ 2x^2\left(x - 1\right) \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x < 0$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; 0\right)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 8. Giải bất phương trình $\dfrac{\sqrt{x^2-x-6}+3\sqrt{x}-\sqrt{2\left(x^2+5x-3\right)}}{x+3-\sqrt{2\left(x^2+10\right)}}\ge 0$

Lời giải:

Điều kiện: $x\ge 3$

Ta có $\left(x+3\right)^2=x^2+6x+9\le x^2+x^2+9+9$

$=2\left(x^2+9\right)<2\left(x^2+10\right)\Rightarrow x+3<\sqrt{2\left(x^2+10\right)}\Leftrightarrow x+3-\sqrt{2\left(x^2+10\right)}<0$

Vậy bất phương trình tương đương với

$\sqrt{x^2-x-6}+3\sqrt{x}-\sqrt{2\left(x^2+5x-3\right)}\le 0\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x-6}+3\sqrt{x}\le\sqrt{2\left(x^2+5x-3\right)}$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2-x-6}+3\sqrt{x}\right)^2\le 2\left(x^2+5x-3\right)\Leftrightarrow 6\sqrt{x\left(x^2-x-6\right)}\le x\left(x+2\right)$

$\Leftrightarrow 6\sqrt{x^2-x-6}\le\left(x+2\right)\sqrt{x}\Leftrightarrow\left(x+2\right)\left(x^2-34x+108\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow x^2-34x+108\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3\le x\le 17-\sqrt{181}\\ x\ge 17+\sqrt{181}\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[3;17-\sqrt{181}\right]\cup\left[3;+\infty\right)$

Bài 9. Giải phương trình $x^3-3x^2-3x+2\sqrt{\left(x+1\right)^3}=0$

Lời giải:

Điều kiện: $x\ge -1$

Phương trình tương đương với

$x^3-3x\left(x+1\right)+2\sqrt{\left(x+1\right)^3}=0$

$\Leftrightarrow x^3-x\left(x+1\right)+2\sqrt{\left(x+1\right)^3}-2x\left(x+1\right)=0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow x\left(x^2-(x+1)\right)+2(x+1)\left(\sqrt{x+1}-x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+1}-x\right)\left(-x\left(\sqrt{x+1}+x\right)+2(x+1)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+1}-x\right)^2\left(x+2\sqrt{x+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}-x=0\\ x+2\sqrt{x+1}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq 0\\ x+1=x^2\end{cases}\\ \begin{cases}x\leq 0\\ 4(x+1)=x^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\ x=2-2\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=2-2\sqrt{2};x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Bài 10. Giải bất phương trình $2\sqrt{3x+1}+4\sqrt{x}>\sqrt{3x^2+x}+2$

Lời giải:

Điều kiện $x\geq 0$

Hai vế của phương trình không âm nên bình phương hai vế của phương trình ta được

$$4(3x+1)+16x+16\sqrt{x(3x+1)}>3x^2+x+4+4\sqrt{3x+1}$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{3x^2+x}>x^2-9x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq 0\\ x^2-9x<0\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-9x\geq 0\\ 16\left(3x^2+x\right)>\left(x^2-9x\right)^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow 0<x<16$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(0;16)$

Bài 11. Giải bất phương trình $3\sqrt{x+3}-4\geq 2x+\sqrt{x+11}$

Lời giải:

Điều kiện $x\geq -3$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Khi đó bất phương trình tương đương với

$$3\sqrt{x+3}-4\ge 2x+\sqrt{x+11}\Leftrightarrow 3\sqrt{x+3}\ge 4+2x+\sqrt{x+11}$$

$$\Leftrightarrow 9(x+3)\ge 4x^2+17x+27+2(2x+4)\sqrt{x+11}\Leftrightarrow x^2+2x\ge (x+2)\sqrt{x+11}$$

$$\Leftrightarrow (x+2)\left(x-\sqrt{x+11}\right)\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+2\ge 0\\ x-\sqrt{x+11}\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x+2\le 0\\ x-\sqrt{x+11}\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow -2\le x\le \frac{1+3\sqrt{5}}{2}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[-2;\frac{1+3\sqrt{5}}{2}\right]$

Bài 12. Giải phương trình $\sqrt{7-x^2+x\sqrt{x+5}}=\sqrt{3-2x-x^2}$

Lời giải:

Phương trình tương đương với

$$\begin{cases}3-2x-x^2\ge 0\\ 7-x^2+x\sqrt{x+5}=3-2x-x^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}-3\le x\le 1\\ x\sqrt{x+5}=-2(x+2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-3\le x\le 1\\ x\ne 0\\ \sqrt{x+5}=-2\dfrac{x+2}{x}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}-2\le x<0\\ x+5=4\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-2\le x<0\\ (x+1)(x^2-16)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-1$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=-1$

Bài 13. Giải phương trình $2\left(\sqrt{2(2+x)}+2\sqrt{2-x}\right)=\sqrt{9x^2+16}$

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Điều kiện: $-2 \le x \le 2$

Khi đó bình phương hai vế của phương trình ta được

$$8(x+2)+16\sqrt{2(4-x^2)}+16(2-x)=9x^2+16$$

$$\Leftrightarrow 9x^2+8x-32=16\sqrt{2(4-x^2)} \Leftrightarrow (9x^2+8x-32)^2=512(4-x^2)$$

$$\Leftrightarrow 81x^4+144x^3-512x-1024=0$$

$\Leftrightarrow (9x^2-32)(9x^2+16x+32)=0 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{32}}{3}$, thỏa mãn điều kiện

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=\pm\dfrac{\sqrt{32}}{3}$.

Bài 14. Giải bất phương trình $\dfrac{(2x-1)\sqrt{x+3}}{2\sqrt{x}+(2+\sqrt{x})\sqrt{1-x}+1-x} \ge 1$

Lời giải:

Điều kiện: $0 \le x \le 1$

Ta có: $2\sqrt{x}+(2+\sqrt{x})\sqrt{1-x}+1-x=2(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})+\sqrt{1-x}(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})$

$=(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})(2+\sqrt{1-x})$ và

$(2x-1)\sqrt{x+3}=(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})(\sqrt{x}-\sqrt{1-x})\sqrt{x+3}$

Vậy nên bất phương trình tương đương với:

$$\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{1-x})\sqrt{x+3}}{2+\sqrt{1-x}} \ge 1 \Leftrightarrow \sqrt{x(x+3)} \ge 2+\sqrt{1-x}+\sqrt{(1-x)(x+3)}$$

Ta có $\sqrt{x(x+3)} \le 2$ do $0 \le x \le 1$ và $2+\sqrt{1-x}+\sqrt{(1-x)(x+3)} \ge 2$. Dấu bằng xảy ra hai vế khi và chỉ khi $x=1$.

Vậy bất phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

Giải các phương trình, bất phương trình sau:

1.1. $\sqrt{x+3}+\sqrt{6-x}=3$

1.2. $\sqrt{x+4}-\sqrt{1-x}=\sqrt{1-2x}$

1.3. $\sqrt[3]{x+4}-\sqrt[3]{x-3}=1$

1.4. $\sqrt{x+9}=5-\sqrt{2x+4}$

1.5. $(x-3)\sqrt{10-x^2}=x^2-x-12$

1.6. $2\sqrt{x+2+\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+1}=4$

1.7. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{5x}$

1.8. $\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x+2)}=2\sqrt{x^2}$

1.9. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$

1.10. $1+\sqrt{1+8x^2-6x\sqrt{1-x^2}}=10x^2$

1.11. $\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}-2\right)\log_2\left(x^2-x\right)=0$

1.12. $\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|=-\sqrt{2}\left(2x^2-1\right)$

1.13. $(x-3)\sqrt{x^2-4}\le x^2-9$.

1.14. $\sqrt{\dfrac{8}{x-2}}+\dfrac{8}{\sqrt{8-x}}=6$

1.15. Giải các bất phương trình sau:

1. $\sqrt{x+1}>3-\sqrt{x+4}$

2. $\sqrt{(x-1)(4-x)}>x-2$

3. $\sqrt{x+3}\ge\sqrt{2x-8}+\sqrt{7-x}$

4. $\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}<\sqrt{5-2x}$

5. $\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+6x+5}\le\sqrt{2x^2+9x+7}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

6. $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}} > x+1$

7. $\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{2x^2-3x+1} \ge x+1$

8. $\sqrt{x-1}+\sqrt{6-x} \ge 3\sqrt{5-x}$

9. $2\sqrt{3x+1}+4\sqrt{x} > \sqrt{3x^2+x}+2$

10. $\sqrt{6x^2-40x+150}-\sqrt{4x^2-60x+100} = 2x-10$

11. $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x} \le 2-\dfrac{x^2}{4}$

12. $\dfrac{\sqrt{x(x+2)}}{\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x}} \ge 1$

13. $\dfrac{1}{2-3x^2}-1 \ge \dfrac{x}{\sqrt{2-3x^2}}$

14. $\dfrac{x^4-4x^2+16}{x^2(4-x^2)}-\left(\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right) \le 1$

15. $\dfrac{x+2}{x+\sqrt{3x^4-11x^2+9}} = \dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2-3}$

16. $\dfrac{3-2\sqrt{x^2+3x+2}}{1-2\sqrt{x^2-x+1}} > 1$

17. $\dfrac{\sqrt{x}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)}{x\sqrt{x}+1-\sqrt{x^2-x^3}} \ge 1$

18. $\dfrac{x^3-3x^2-3x+2\sqrt{(x+1)^3}}{x+1-\sqrt{2(x^2+2)}} \ge 0$

19. $\dfrac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x^2+3}}{2(x-2)\left(\sqrt{2x-2}+\sqrt[3]{4x-4}\right)-3x+1} \ge 0$

20. $\dfrac{\sqrt{x-5}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-5}\right)^3-2}{x+2+\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x^2+10x+6}} \ge 0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

21. $$\frac{2\sqrt{3x+1}+4\sqrt{x}-\sqrt{3x^2+x}-2}{2x-\sqrt{2\left(x^2+1\right)}}\geq 0$$

22. $$\frac{\sqrt{x^5+x^3+x}-\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}{\sqrt{x^2\left(x^2-x+1\right)}}\leq -1$$

Bài 12. Giải các phương trình sau:

1.1. $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}=x+1$

1.2. $\dfrac{x^2}{\sqrt{3x-2}}-\sqrt{3x-2}=1-x$

1.3. $\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x^2-1}=1$.

1.4. $\dfrac{x}{2}-2=\dfrac{x^2}{2\left(1+\sqrt{1+x}\right)^2}$

1.5. $3\left(2+\sqrt{x-2}\right)=2x+\sqrt{x+6}$

1.6. $\sqrt{x\left(x-1\right)}+\sqrt{x\left(x+2\right)}=2\sqrt{x^2}$

1.7. $\dfrac{\sqrt{2\left(x^2-16\right)}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}=\dfrac{7-x}{\sqrt{x-3}}$

1.8. $x^2-3x-4=\sqrt{x-1}\left(x^2-4x-2\right)$

1.9. $\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{2x-1}-1}=\dfrac{1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}}$

1.10. $\sqrt{3x^2+33}+3\sqrt{x}=2x+7$

1.11. $\dfrac{\sqrt[3]{7-x}-\sqrt[3]{x-5}}{\sqrt[3]{7-x}+\sqrt[3]{x-5}}=6-x$

1.12. $\sqrt{x^2-5x+6}+\sqrt{x-3}+\sqrt{x+21}=\sqrt{x^2+9x-42}$

1.13. $2\sqrt{\left(2x+5\right)\left(x^2+x+1\right)}=x^2+6x-1$

1.14. $\left(25-3x\right)\sqrt{x^2-1}=3x$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.15. $(x-2)\sqrt{x-1}-\sqrt{2}x+2=0$

1.16. $\dfrac{3-x-\sqrt{5-x^2}}{\cos\dfrac{2x-7}{4}-\cos\dfrac{x-5}{4}}\geq 0$

1.17. $\sqrt[4]{27x^2+24x+\dfrac{28}{3}}=1+\sqrt{\dfrac{27}{2}x+6}$

PHƯƠNG PHÁP TRỤC CĂN THỨC

Áp dụng với các phương trình nhẩm được nghiệm x_0 và ta biến đổi phương trình thành phương trình tương đương dạng $(x-x_0)A(x)=0$. Sau đó chỉ ra $A(x)\neq 0$ với x thuộc miền xác định của phương trình, ta thường đánh giá qua bất đẳng thức hoặc khảo sát tính đơn điệu của hàm số.

Sử dụng những hằng đẳng thức sau:

$$\sqrt{A}-\sqrt{B}=\frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$$

$$\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}=\frac{A-B}{\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}}$$

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải phương trình sau: $\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3(x^2-x-1)}-\sqrt{x^2-3x+4}$

<u>Lời giải:</u>

Nhận thấy $3x^2-5x+1-3(x^2-x+1)=-2(x-2)$

Và $(x^2-2)-(x^2-3x+4)=3(x-2)$

Do đó trục căn thức phương trình tương đương với

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\frac{-2(x-2)}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3(x^2-x-1)}}=\frac{3(x-2)}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{3}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}+\frac{2}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3(x^2-x-1)}}\right)=0$$

$\Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

Vậy $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 2. Giải phương trình sau: $\sqrt{x^2+12}-\sqrt{x^2+5}=3x-5$

Lời giải:

Để phương trình có nghiệm thì $3x-5=\sqrt{x^2+12}-\sqrt{x^2+5}>0 \Rightarrow x>\frac{5}{3}$.

Nhận thấy $x=2$ là nghiệm của phương trình nên ta biến đổi về phương trình tương đương sau

$$\left(\sqrt{x^2+12}-4\right)+\left(3-\sqrt{x^2+5}\right)=3x-6$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+12}+4}+\frac{4-x^2}{3+\sqrt{x^2+5}}=3(x-2)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+2}{3+\sqrt{x^2+5}}-3\right)=0 \Leftrightarrow x=2$$

Do $x>\frac{5}{3} \Rightarrow \frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+2}{3+\sqrt{x^2+5}}-3<\frac{x+2}{3+\sqrt{x^2+5}}-\frac{x+2}{3+\sqrt{x^2+5}}-3=-3<0$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

Bài 3. Giải phương trình sau: $\sqrt[3]{x^2-1}+x=\sqrt{x^3-2}$

Lời giải:

Điều kiện $x\geq\sqrt[3]{2}$. Nhận thấy $x=3$ là nghiệm của phương trình, nên biến đổi về phương trình tương đương sau

$$\left(\sqrt[3]{x^2-1}-2\right)+x-3=\sqrt{x^3-2}-5$$

$$\Leftrightarrow (x-3)+\frac{x^2-9}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}=\frac{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)}{\sqrt{x^3-2}+5}$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(1+\frac{x+3}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}-\frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}\right)=0\ (1)$$

Do $x\geq\sqrt[3]{2}$ nên $1+\dfrac{x+3}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}=1+\dfrac{x+3}{\left(\sqrt[3]{x^2-1}+1\right)^2+3}<2<\dfrac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}$

Do đó phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x=3$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

Bài 4. Giải phương trình sau: $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=2x^2-5x-1$

Lời giải:

Điều kiện $2\leq x\leq 4$

Nhận thấy $x=3$ là nghiệm của phương trình, khi đó phương trình tương đương với

$$\left(\sqrt{x-2}-1\right)+\left(\sqrt{4-x}-1\right)=2x^2-5x-3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{3-x}{\sqrt{4-x}+1}=(x-3)(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{-1}{\sqrt{4-x}+1}-(2x+1)\right)=0\ (1)$$

Do $2\leq x\leq 4\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}+\dfrac{-1}{\sqrt{4-x}+1}-(2x+1)<\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}-1-5<0$

Do đó phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x=3$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

Bài 5. Giải phương trình sau: $x^2+x-1=(x+2)\sqrt{x^2-2x+2}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Nhận thấy $x=-2$ không là nghiệm của phương trình nên phương trình tương đương với

$$\sqrt{x^2-2x+2}=\frac{x^2+x-1}{x+2}$$

Phân tích:

Thêm vào 2 vế của phương trình lượng $mx+n$, ta có

$$\sqrt{x^2-2x+2}-(mx+n)=\frac{x^2+x-1}{x+2}-(mx+n)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-m^2)x^2-2(1+mn)x+2-n^2}{\sqrt{x^2-2x+2}+(mx+n)}=\frac{(1-m)x^2+(1-2m-n)x-1-2n}{x+2}$$

Ta chọn m,n sao cho $\frac{1-m^2}{1-m}=\frac{-2(1+mn)}{1-2m-n}=\frac{2-n^2}{-1-2n}\Leftrightarrow m=0;n=3$

Vậy phương trình tương đương với

$$\sqrt{x^2-2x+2}-3=\frac{x^2+x-1}{x+2}-3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x-7}{\sqrt{x^2-2x+2}+3}=\frac{x^2-2x-7}{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x-7=0 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}+3}=\frac{1}{x+2}\quad (1) \end{array}\right.$$

Phương trình (1) vô nghiệm, nên phương trình tương đương với

$$x^2-2x-7=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{7}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=1\pm\sqrt{7}$.

Bài 6. Giải phương trình sau: $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}+\sqrt{2x-5}=2x^2-5x$

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Điều kiện $\frac{5}{2} \le x \le 4$

Nhẩm nghiệm thấy phương trình có nghiệm $x=3$, vì vậy biến dổi phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\sqrt{x-2}-1\right)+\left(\sqrt{4-x}-1\right)+\left(\sqrt{2x-5}-1\right)=2x^2-5x-3$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}-\frac{1}{\sqrt{4-x}+1}+\frac{2}{\sqrt{2x-5}+1}-2x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ \frac{1}{\sqrt{x-2}+1}-\frac{1}{\sqrt{4-x}+1}+\frac{2}{\sqrt{2x-5}+1}-2x-1=0 \end{array}\right.$$

Do $\frac{5}{2} \le x \le 4$ nên $\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}-\frac{1}{\sqrt{4-x}+1}+\frac{2}{\sqrt{2x-5}+1}-2x-1<0$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

Bài 7. Giải phương trình: $\sqrt{x+2}+\sqrt{5x+6}+2\sqrt{8x+9}=4x^2$

Lời giải:

Điều kiện: $x \ge -\frac{9}{8}$.

Khi đó phương trình tương đương với

$$\left(\frac{x+4}{3}-\sqrt{x+2}\right)+\left(x+2-\sqrt{5x+6}\right)+2\left(\frac{4x+7}{3}-\sqrt{8x+9}\right)+4\left(x^2-x-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+4)^2-9(x+2)}{x+4+3\sqrt{x+2}}+\frac{(x+2)^2-(5x+6)}{x+2+\sqrt{5x+6}}+\frac{2\left[(4x+7)^2-9(8x+9)\right]}{4x+7+3\sqrt{8x+9}}+4\left(x^2-x-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-x-2\right)\left(\frac{1}{x+4+3\sqrt{x+2}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+6}}+\frac{32}{4x+7+3\sqrt{8x+9}}+4\right)=0 \ (*)$$

Do $x \ge -\frac{9}{8}$ nên $\frac{1}{x+4+3\sqrt{x+2}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+6}}+\frac{32}{4x+7+3\sqrt{8x+9}}+4>0$

Do đó phương trình (*) tương đương với: $x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$ thỏa mãn điều kiện.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=-1; x=2$.

Bài 8. Giải phương trình:

$$\sqrt{2x^3+4x^2+4x}-\sqrt[3]{16x^3+12x^2+6x+3}=4x^4+2x^3-2x-1$$

Lời giải:

Điều kiện $2x^3+4x^2+4x=2x\left(x^2+2x+2\right)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$.

Khi đó phương trình tương đương với

$$\left[\sqrt{(2x+1)^2+2x^3-1}-(2x+1)\right]+\left[(2x+1)-\sqrt[3]{(2x+1)^3+4\left(2x^3-1\right)}\right]=\left(2x^3-1\right)(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^3-1}{A}-\frac{4\left(2x^3-1\right)}{B}=\left(2x^3-1\right)(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow \left(2x^3-1\right)\left(\frac{1}{A}-\frac{4}{B}-2x-1\right)=0 \ (1)$$

Trong đó $A=\sqrt{(2x+1)^2+2x^3-1}+(2x+1)>1$

$$B=(2x+1)^2+(2x+1)\sqrt[3]{(2x+1)^3+4\left(2x^3-1\right)}+\sqrt[3]{\left[(2x+1)^3+4\left(2x^3-1\right)\right]^2}>0$$

Do đó $\frac{1}{A}-\frac{4}{B}-2x-1<0$. Suy ra phương trình (1) tương đương với $2x^3-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Bài 8. Giải phương trình: $2\sqrt{x-1}+\sqrt{5x-1}=x^2+1$

Lời giải:

Điều kiện $x\geq 1$.

❖ Với $1\leq x<2$, phương trình tương đương với:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$2\sqrt{x-1}+\sqrt{5x-1}-2=x^2-1 \Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{2}{\sqrt{x-1}}+\frac{5}{\sqrt{5x-1}+2}-x-1\right)=0 \Leftrightarrow x=1$

Do $\frac{2}{\sqrt{x-1}}+\frac{5}{\sqrt{5x-1}+2}-x-1>0, \forall x\in[1;2)$

❖ Với $x\geq 2$, phương trình tương đương với:

$2\sqrt{x-1}-2+\sqrt{5x-1}-3=x^2-4$

$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{2}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{5}{\sqrt{5x-1}+2}-x-2\right)=0 \Leftrightarrow x=2$

Do $\frac{2}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{5}{\sqrt{5x-1}+2}-x-2<0, \forall x[2;+\infty)$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=1; x=2$.

Bài 9. Giải phương trình $\sqrt{\frac{x-7}{8}}+\sqrt{\frac{x-6}{9}}+\sqrt{\frac{x-5}{10}}=\sqrt{\frac{x-8}{7}}+\sqrt{\frac{x-9}{6}}+\sqrt{\frac{x-10}{5}}$

<u>Lời giải:</u>

Điều kiện: $x\geq 10$.

Khi đó phương trình được biến đổi thành

$$\sqrt{\frac{x-8}{7}}-\sqrt{\frac{x-7}{8}}+\sqrt{\frac{x-9}{6}}-\sqrt{\frac{x-6}{9}}+\sqrt{\frac{x-10}{5}}-\sqrt{\frac{x-5}{10}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-15}{56\left(\sqrt{\frac{x-8}{7}}+\sqrt{\frac{x-7}{8}}\right)}+\frac{3(x-15)}{54\left(\sqrt{\frac{x-9}{6}}+\sqrt{\frac{x-6}{9}}\right)}+\frac{5(x-15)}{50\left(\sqrt{\frac{x-10}{5}}+\sqrt{\frac{x-5}{10}}\right)}=0$$

$\Leftrightarrow x=15$. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=15$.

Bài 10. Giải phương trình $4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}=x^2+8$

<u>Lời giải:</u>

Điều kiện: $-2\leq x\leq \frac{22}{3}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Phân tích:

Ta thấy $x=2, x=-1$ là nghiệm của phương trình nên ta tìm cách biến đổi phương trình để có nhân tử chung $(x+1)(x-2)=x^2-x-2$

Vì thế ta viết phương trình lại như sau:

$$3\left(4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}\right)=3\left(x^2+8\right)$$

$$\Leftrightarrow 12\sqrt{x+2}-(4x+16)+3\sqrt{22-3x}-(14-x)=3\left(x^2-x-2\right)$$ [3]

$$\Leftrightarrow \frac{-16\left(x^2-x-2\right)}{12\sqrt{x+2}+(4x+16)}-\frac{x^2-x-2}{3\sqrt{22-3x}+(14-x)}=3\left(x^2-x-2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-x-2\right)\left(\frac{16}{12\sqrt{x+2}+(4x+16)}+\frac{1}{3\sqrt{22-3x}+(14-x)}+3\right)=0\ (*)$$

Do $-2\le x\le\frac{22}{3}$ nên $\frac{16}{12\sqrt{x+2}+(4x+16)}+\frac{1}{3\sqrt{22-3x}+(14-x)}+3>0$. Do đó phương trình (*) tương tương với:

$x^2-x-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=-1, x=2$.

Bài 11. Giải bất phương trình $\sqrt{2\left(4-x^2\right)}\le\frac{9x^2+8x-32}{16}$

Lời giải:

Điều kiện: $\frac{\sqrt{304}-4}{9}\le x\le 2$.

Khi đó bất phương trình tương đương với:

$$\frac{9x^2-32}{16}\ge\sqrt{2\left(4-x^2\right)}-\frac{x}{2}\Leftrightarrow\frac{9x^2-32}{16}\ge\frac{32-9x^2}{2\left(x+\sqrt{2\left(4-x^2\right)}\right)}$$

[3] Cách phân tích liên hợp dựa vào hình học phẳng tọa độ hoặc hệ số bất định

$$\Leftrightarrow (9x^2-32)\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2\left(x+\sqrt{2(4-x^2)}\right)}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 9x^2-32\ge 0 \Leftrightarrow x\ge \frac{4\sqrt{2}}{3}\vee x\le -\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Kết hợp với điều kiện ra suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[\frac{4\sqrt{2}}{3},2\right]$

Bài 12. Giải phương trình $(x+1)\sqrt{x+2}+(x+6)\sqrt{x+7}=x^2+7x+12$

Lời giải:

Điều kiện: $x\ge -2$.

Khi đó biến đổi phương trình thành:

$$(x+1)\left(\sqrt{x+2}-2\right)+(x+6)\left(\sqrt{x+7}-3\right)=x^2+7x+12-2(x+1)-3(x+6)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{(x+6)(x-2)}{\sqrt{x+7}+3}=(x-2)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3}-x-4\right)=0 \ (*)$$

Do $x\ge -2$ nên $\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3}-x-4\le \frac{x+1}{2}+\frac{x+6}{3}-x-4<0$

Do đó phương trình (*) chỉ có nghiệm duy nhất $x=2$.

Vậy $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 13. Giải phương trình $\sqrt[3]{162x^3+2}-\sqrt{27x^2-9x+1}=1$

Lời giải:

Phương trình tương đương với:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\left(\sqrt[3]{162x^3+2}-2\right)-\left(\sqrt{27x^2-9x+1}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{162x^3-6}{\left(\sqrt[3]{162x^3+2}\right)^2+2\sqrt[3]{162x^3+2}+4}-\frac{27x^2-9x}{\sqrt{27x^2-9x+1}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)\left(\frac{2\left(9x^2+3x+1\right)}{\left(\sqrt[3]{162x^3+2}\right)^2+2\sqrt[3]{162x^3+2}+4}-\frac{3x}{\sqrt{27x^2-9x+1}+1}\right)=0$$

Xét phương trình: $\dfrac{2\left(9x^2+3x+1\right)}{\left(\sqrt[3]{162x^3+2}\right)^2+2\sqrt[3]{162x^3+2}+4}-\dfrac{3x}{\sqrt{27x^2-9x+1}+1}=0$

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình nên chia hai vế phương trình cho $x\neq 0$ ta được:

$$2\left(3x+1+\frac{1}{3x}\right)=\frac{\left(\sqrt[3]{162x^3+2}\right)^2+2\sqrt[3]{162x^3+2}+4}{\sqrt{27x^2-9x+1}+1}=\frac{\left(\sqrt[3]{162x^3+2}\right)^2+2\sqrt[3]{162x^3+2}+4}{\sqrt[3]{162x^3+2}}\quad (*)$$

Đặt $t=\sqrt[3]{162x^3+2}$ thì phương trình (*) trở thành:

$$3x+\frac{1}{3x}+1=\frac{t}{2}+\frac{2}{t}+1\Leftrightarrow 3x=\frac{t}{2}\Leftrightarrow 6x=\sqrt[3]{162x^3+2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{3}$.

Bài 14. Giải phương trình $\sqrt[3]{7x-8}+\sqrt{\dfrac{7-2x^2}{6}}=x$

<u>Lời giải:</u>

Điều kiện: $7-2x^2\geq 0$

Khi đó phương trình tương đương với: $\sqrt[3]{7x-8}-(2x-2)+\sqrt{\dfrac{7-2x^2}{6}}-(2-x)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{7x-8-(2x-2)^3}{\left(\sqrt[3]{7x-8}\right)^2+(2x-2)\sqrt[3]{7x-8}+(2x-2)^2}+\frac{\frac{7-2x^2}{6}-(2-x)^2}{\sqrt{\frac{7-2x^2}{6}}+(2-x)}=0$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow \frac{-x\left(8x^2-24x+17\right)}{\left(\sqrt[3]{7x-8}\right)^2+(2x-2)\sqrt[3]{7x-8}+(2x-2)^2}-\frac{8x^2-24x+17}{6\left(\sqrt{\frac{7-2x^2}{6}}+(2-x)\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(8x^2-24x+17\right)\left(\frac{x}{\left(\sqrt[3]{7x-8}\right)^2+(2x-2)\sqrt[3]{7x-8}+(2x-2)^2}+\frac{1}{6\left(\sqrt{\frac{7-2x^2}{6}}+(2-x)\right)}\right)=0$$

Xét phương trình: $\frac{x}{\left(\sqrt[3]{7x-8}\right)^2+(2x-2)\sqrt[3]{7x-8}+(2x-2)^2}+\frac{1}{6\left(\sqrt{\frac{7-2x^2}{6}}+(2-x)\right)}=0$

Chứng minh vế trái luôn lớn hơn 0

Do vậy phương trình chỉ có nghiệm $8x^2-24x+17=0 \Leftrightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{2}}{4}$

Bài 15. Giải phương trình: $x^3-3x+1=\sqrt{8-3x^2}$

Lời giải:

Điều kiện: $8-3x^2\geq 0$

Khi đó phương trình tương đương với:

$$x^3-3x+1-(2-x)+(2-x)-\sqrt{8-3x^2}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-x-1\right)+\frac{4\left(x^2-x-1\right)}{(2-x)+\sqrt{8-3x^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-x-1\right)\left(x+1+\frac{4}{(2-x)+\sqrt{8-3x^2}}\right)=0 \quad (*)$$

Ta chứng minh phương trình: $x+1+\frac{4}{(2-x)+\sqrt{8-3x^2}}=0$ vô nghiệm, thật vậy

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Xét hàm số $f(x)=2-x+\sqrt{8-3x^2}, x\in\left[-\sqrt{\frac{8}{3}},\sqrt{\frac{8}{3}}\right]$

Ta có $f'(x)=-1-\frac{3x}{\sqrt{8-3x^2}}=0\Leftrightarrow x=-\sqrt{\frac{2}{3}}$, có $f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{6+4\sqrt{6}}{3}$, $f\left(\sqrt{\frac{8}{3}}\right)=2-\sqrt{\frac{8}{3}}>0$

$f\left(-\sqrt{\frac{8}{3}}\right)=2+\sqrt{\frac{8}{3}}>0$. Suy ra $0<f(x)\le\frac{6+4\sqrt{6}}{3}$. Nên $x+1+\frac{1}{f(x)}\ge1-\sqrt{\frac{8}{3}}+\frac{1}{\frac{6+4\sqrt{6}}{3}}>0$

Vậy nên phương trình (*) chỉ có nghiệm $x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x}=2x-6$

1.2. $x^2+9x+20=2\sqrt{3x+10}$

1.3. $2x^2-11x+21=\sqrt[3]{4x-4}$

1.4. $3\left(2+\sqrt{x-2}\right)=2x+\sqrt{x+6}$

1.5. $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}=\frac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}}$

1.6. $\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2$

1.7. $3x^2+\sqrt{3x+1}=2(7x+4)+\sqrt{6-x}$

1.8. $\sqrt{5x-1}+\sqrt[3]{9-x}=2x^2+3x-1$

1.9. $\sqrt[3]{3x-92}+\sqrt{4x-108}=x-28$

1.10. $(x+2)\left(x^2-\sqrt{x^2+x+2}\right)=-3x$

1.11. $(x+2)\left(x^2-\sqrt{x^2+x+2}\right)=x+1$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.12. $\sqrt{\frac{5}{4}-x^2+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{\frac{5}{4}-x^2-\sqrt{1-x^2}}=x+1$

1.13. $\frac{\sqrt[3]{7-x}-\sqrt[3]{x-5}}{\sqrt[3]{7-x}+\sqrt[3]{x-5}}=6-x$

1.14. $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6}=3$

1.15. $4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}=x^2+8$

1.16. $\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{3x^2-5x-1}=\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2-3x+4}$

1.17. $\sqrt[3]{14-x^3}+x=2\left(1-\sqrt{x^2-2x-1}\right)$

1.18. $\sqrt{x+1}+\sqrt{2-x}+2=x^2+2x$

1.19. $\sqrt{3x^2-2x}=\sqrt{4-x}+x^2-3x-4$

1.20. $3x^2+\sqrt{3x+1}=2(7x+4)+\sqrt{6-x}$

1.21. $2\left(x^2+x-1\right)^2+2x^2+2x=3+\sqrt{4x+5}$

1.22. $\sqrt{x^2+2x+92}\geq x^2+2x+1+\sqrt{x-1}$

1.23. $\sqrt{x^3-2x+5}+\sqrt{24x-23}=\frac{5x^2+4}{3}$

1.24. $\sqrt{5-\left(2x^2-3\right)\left(x-3\right)^2}=2x^3+2x^2-1$

1.25. $\sqrt[3]{\left(x-1\right)^2}+\sqrt{\left(x+2\right)^3}=x^3+x-1$

1.26. $\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{5x-2}=\frac{5}{4}x+\frac{1}{2}$

1.27. $\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{9}{4}(x-1)\sqrt{2(x-1)}$

1.28. $\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+8}+\sqrt[4]{x+81}=\frac{3}{2}(x+4)$

1.29. $4\sqrt{1+x}-1\geq 3x+2\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x^2}$

1.30. Giải các bất phương trình sau:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1. $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3$

2. $\frac{x^2}{\left(1+\sqrt{x+1}\right)^2} > x-4$

3. $\frac{\sqrt{12+x-x^2}}{x-11} \geq \frac{\sqrt{12+x-x^2}}{2x-9}$

4. $\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{2x^2-3x+1} \geq x-1$

1.31. $3x^4-4x^3=1-\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}$

Đáp số: $x=0$

1.32. $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}+\sqrt{2x-5}=2x^2-5x$

Đáp số: $x=3$

1.33. $\sqrt{6-x}+\sqrt{x-1}=x^2-1$

Đáp số: $x=2$

1.34. $\sqrt[3]{x+6}+x^2=7-\sqrt{x-1}$

Đáp số: $x=2$

1.35. $2x^2-11x+21-3\sqrt[3]{4(x-1)}=0$

Đáp số: $x=3$

1.36. $\sqrt[4]{x^2+77}-\sqrt[3]{x^2-3}=2$

Đáp số: $x=\pm 2$

1.37. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-3}=\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}$

Đáp số: $x=2$

1.38. $\sqrt{x^2-3x+2}+x^2-4x+3 \geq 2\sqrt{x^2-5x+4}$

Đáp số: $S=\{1\}\cup[4;+\infty)$

1.39. $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}$

Đáp số: $x=-2$

1.40. $\sqrt{2x^2+16x+18}+\sqrt{x^2-1}=2x+4$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Đáp số: $x = \pm 1; x = \frac{-32+\sqrt{513}}{7}$

1.41. $\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2} = \frac{x+3}{5}$

Đáp số: $x = 2$

1.42. $\sqrt[3]{7x-8}+1=\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2$

1.43. $2(x-2)\left(\sqrt{2x-2}+\sqrt[3]{4x-4}\right)=3x-1$

1.44. $\sqrt{1-4x^2}+2\sqrt{x^2+1}=8x$

1.45. $4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}=x^2+8$

1.46. $2\left(x^2+x-1\right)^2+2x^2+2x=3+\sqrt{4x+5}$

ĐƯA VỀ HỆ TẠM

Phương trình có dạng $\sqrt{A}+\sqrt{B}=C$ mà $A-B=\alpha C$, khi đó ta có

$\begin{cases}\sqrt{A}+\sqrt{B}=C\\ \sqrt{A}-\sqrt{B}=\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{A}=\dfrac{C+\alpha}{2}\\ \sqrt{B}=\dfrac{C-\alpha}{2}\end{cases}$, giải hệ này và thử lại nghiệm.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải phương trình sau: $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4(1)$

Lời giải:

Nhận thấy $\left(2x^2+x+9\right)-\left(2x^2-x+1\right)=2(x+4)$, và $x=-4$ không là nghiệm của phương trình

Khi đó phương trình tương đương với

$$\frac{2(x+4)}{\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}}=x+4 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}=2(2)$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Từ (1) và (2) ta suy ra $\sqrt{2x^2+x+9}=\frac{x+6}{2}\Leftrightarrow x=0; x=\frac{8}{7}$

Thử lại thấy cả hai nghiệm này thỏa mãn

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=0; x=\frac{8}{7}$.

Bài 2. Giải phương trình sau: $\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=3x$.

Lời giải:

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình, chia cả hai vế phương trình cho $x\neq 0$ ta được

$$\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=3$$

Đặt $t=\frac{1}{x}\Rightarrow$ phương trình trở thành $\sqrt{2+t+t^2}+\sqrt{1-t+t^2}=3(1)$

Ta có $\left(\sqrt{2+t+t^2}+\sqrt{1-t+t^2}\right)\left(\sqrt{2+t+t^2}-\sqrt{1-t+t^2}\right)=2t+1$

$$\Rightarrow \sqrt{2+t+t^2}-\sqrt{1-t+t^2}=\frac{2t+1}{3}(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\sqrt{2+t+t^2}=\frac{2t+10}{6}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-\frac{7}{8}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-\frac{8}{7}\end{array}\right.$

Thử lại ta thấy chỉ có nghiệm $x=1$ thỏa mãn,

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 3. Giải phương trình sau: $\sqrt{x^2-9x+24}-\sqrt{6x^2-59x+149}=5-x$

Lời giải:

Phương trình tương đương với

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\frac{-5(x-5)^2}{\sqrt{x^2-9x+24}+\sqrt{6x^2-59x+149}}=5-x$$

$$\Leftrightarrow (5-x)\left(\frac{-5(5-x)}{\sqrt{x^2-9x+24}+\sqrt{6x^2-59x+149}}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ \dfrac{-5(5-x)}{\sqrt{x^2-9x+24}+\sqrt{6x^2-59x+149}}-1=0(*) \end{array}\right.$$

Phương trình (*) tương đương với $\sqrt{x^2-9x+24}+\sqrt{6x^2-59x+149}=-5(5-x)(1)$

Ta lại có $\sqrt{x^2-9x+24}-\sqrt{6x^2-59x+149}=5-x(2)$

Từ (1) và (2) ta suy ra $\sqrt{x^2-9x+24}=2x-10 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 5 \\ x^2-9x+24=(2x-10)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{19}{3}$, thử lại thấy nghiệm này thỏa mãn.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=5; x=\frac{19}{3}$.

Bình luận:

Thực chất của phương pháp này là trục căn thức, Xem **phương pháp trục căn thức** ở trên.

BIẾN ĐỔI VỀ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

- Đôi khi biến đổi trực tiếp về phương trình tích không dễ thực hiện, khi đó nếu trong biểu thức của phương trình có xuất hiện nhân tử chung thì ta đặt ẩn phụ sau đó biến đổi phương trình mới về dạng tích sẽ dễ dàng hơn.
- Chúng ta sử dụng các biến đổi quen thuộc :

$$u+v=uv+1 \Rightarrow (u-1)(v-1)=0$$

$$au+bv=ab+uv \Rightarrow (b-u)(a-v)=0$$

Dạng toán : $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Sử dụng $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

Từ đó suy ra $(a+b)(b+c)(c+a)=0$.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải phương trình sau : $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}=1+\sqrt[3]{x^2+3x+2}$

Lời giải :

Phương trình tương đương với $\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)\left(\sqrt[3]{x+2}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{x+1}-1=0\\ \sqrt[3]{x+2}-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-1\end{array}\right.$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x=0; x=-1$.

Bài 2. Giải phương trình : $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2+x}$

Lời giải :

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình, chia hai vế phương trình cho x ta được

$$\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}+\sqrt[3]{x}=1+\sqrt[3]{x+1} \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{x}-1=0\\ \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}-1\end{array}\right. \Leftrightarrow x=1$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 3. Giải phương trình sau : $\sqrt{x+3}+2x\sqrt{x+1}=2x+\sqrt{x^2+4x+3}$

Lời giải :

Điều kiện $x\ge -1$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Khi đó phương trình tương đương với

$$\sqrt{x+3}+2x\sqrt{x+1}=2x+\sqrt{(x+3)(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+3}-2x\right)\left(\sqrt{x+1}-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+3}-2x=0\\ \sqrt{x+1}-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x=0;x=1$.

Bài 4. Giải phương trình sau : $x+2\sqrt{7-x}=2\sqrt{x+1}+\sqrt{-x^2+6x+7}-1$

Lời giải :

Điều kiện $-1\le x\le 7$.

Dặt $a=\sqrt{7-x},b=\sqrt{x+1}$ khi đó phương trình trở thành

$$b^2+2a-1=ab+2b-1\Leftrightarrow(a-b)(b-2)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\ b=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{7-x}=\sqrt{x+1}\\ \sqrt{x+1}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow x=3$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

Bài 5. Giải phương trình sau : $\sqrt{x+3}+\dfrac{4x}{\sqrt{x+3}}=4\sqrt{x}$

Lời giải :

Diều kiện $x\ge 0$

Chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{x+3}$ ta được

$$1+\frac{4x}{x+3}=4\sqrt{\frac{x}{x+3}}\Leftrightarrow\left(1-2\sqrt{\frac{x}{x+3}}\right)^2=0\Leftrightarrow\sqrt{\frac{x}{x+3}}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=1.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 6. Giải phương trình : $x=\sqrt{2-x}.\sqrt{3-x}+\sqrt{3-x}.\sqrt{5-x}+\sqrt{5-x}.\sqrt{2-x}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải :

Điều kiện : $0 \le x \le 2$.

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{2-x} \\ v = \sqrt{3-x} \\ w = \sqrt{5-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - u^2 = uv + vw + wu \\ x = 3 - v^2 = uv + vw + wu \\ x = 5 - w^2 = uv + vw + wu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = (u+v)(u+w) \\ 3 = (u+v)(v+w) \\ 5 = (v+w)(u+w) \end{cases}$

Giải hệ trên ta được : $u = \dfrac{\sqrt{30}}{60} \Leftrightarrow x = \dfrac{239}{120}$.

Bài 7. Giải hệ phương trình : $\sqrt[3]{7x+1} - \sqrt[3]{x^2 - x - 8} + \sqrt[3]{x^2 - 8x - 1} = 2$

Lời giải :

Đặt $a = \sqrt[3]{7x+1}, b = -\sqrt[3]{x^2 - x - 8}, c = \sqrt[3]{x^2 - 8x - 1}$, khi đó ta có

$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3 \Leftrightarrow 3(a+b)(b+c)(c+a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -b \\ b = -c \\ c = -a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{7x+1} = \sqrt[3]{x^2 - x - 8} \\ \sqrt[3]{x^2 - x - 8} = \sqrt[3]{x^2 - 8x - 1} \\ \sqrt[3]{7x+1} = -\sqrt[3]{x^2 - 8x - 1} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0, x = \pm 1, x = 9$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm là $x = 0, x = \pm 1, x = 9$.

Bài 8. Giải phương trình sau : $\sqrt[3]{x^2 + 3x + 2}\left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x+2}\right) = 1$

Lời giải :

Phương trình đã cho tương đương với

$(x+1) - (x+2) + \sqrt[3]{x^2 + 3x + 2}\left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x+2}\right) = 0$ (*)

Ta đặt $a = \sqrt[3]{x+1}, b = -\sqrt[3]{x+2}$, khi đó phương trình (*) trở thành :

$a^3+b^3-ab(a+b)=0 \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2=0$

$\Leftrightarrow a=\pm b \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+1}=\pm\sqrt[3]{x+2} \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$.

Thử lại thấy nghiệm $x=-\frac{3}{2}$ thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=-\frac{3}{2}$.

Bài 9. Giải bất phương trình $7\sqrt{3x-4}+(4x-3)\sqrt{6-x}\ge 32$

Lời giải :

Điều kiện : $\frac{4}{3}\le x\le 6$ (*)

Khi đó bất phương trình tương đương với

$\left[(3x-4)+3(6-x)\right]\sqrt{3x-4}+\left[3(3x-4)+(6-x)\right]\sqrt{6-x}\ge 64$

$\Leftrightarrow (3x-4)\sqrt{3x-4}+3(3x-4)\sqrt{6-x}+3(6-x)\sqrt{3x-4}+(6-x)\sqrt{6-x}\ge 64$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3x-4}+\sqrt{6-x}\right)^3\ge 64 \Leftrightarrow \sqrt{3x-4}+\sqrt{6-x}\ge 4 \Leftrightarrow 2x+2+2\sqrt{(3x-4)(6-x)}\ge 16$

$\Leftrightarrow \sqrt{(3x-4)(6-x)}\ge 7-x \Leftrightarrow (3x-4)(6-x)\ge (7-x)^2$ do điều kiện (*)

$\Leftrightarrow 4x^2-36x+73\le 0 \Leftrightarrow \frac{9-2\sqrt{2}}{2}\le x\le \frac{9+2\sqrt{2}}{2}$ thỏa mãn điều kiện

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[\frac{9-2\sqrt{2}}{2},\frac{9+2\sqrt{2}}{2}\right]$

Bài 10. Giải bất phương trình $(x+2)\left(\sqrt{2x+3}-2\sqrt{x+1}\right)+\sqrt{2x^2+5x+3}-1\ge 0$

Lời giải :

Điều kiện : $x\ge -1$

Nhận xét :

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta thấy xuất hiện nhân tử chung $\sqrt{2x+3};\sqrt{x+1}$ trong $\sqrt{2x^2+5x+3}$

Khi đó ta tìm cách biến đổi phương trình nhờ đặt $\begin{cases} a=\sqrt{2x+3} \\ b=\sqrt{x+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2-b^2=x+2 \\ a^2-2b^2=1 \\ \sqrt{2x^2+5x+3}=ab \end{cases}$

Khi đó bất phương trình trở thành

$$\left(a^2-b^2\right)\left(a-2b\right)+ab-\left(a^2-2b^2\right)\geq 0 \Leftrightarrow \left(a-b\right)\left(a+b\right)\left(a-2b\right)+\left(ab-a^2+2b^2\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a+b\right)\left(a-2b\right)\left(a+b-1\right)\geq 0$$

Nhưng do $a+b>0$ nên bất phương trình trên tương đương với

$$\left(a-2b\right)\left(a+b-1\right)\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{2x+3}-2\sqrt{x+1}\geq 0 \\ \sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}-1\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{2x+3}-2\sqrt{x+1}\leq 0 \\ \sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}-1\leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x\leq -\frac{1}{2}$$

Đối chiếu với điều kiện suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$

Bài 11. Giải bất phương trình $\sqrt{\frac{x^4+x^2+1}{x\left(x^2+1\right)}}\geq \sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+1}}-\frac{x^2+1}{x}$

<u>Lời giải :</u>

Điều kiện : $x>0$.

Khi đó bất phương trình được biến đổi thành

$$\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x}.\frac{x^2-x+1}{x^2+1}}\geq \sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+1}}-\frac{x^2+x+1}{x}+1$$

Đến đây ta đặt : $a=\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+1}},b=\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x}}$ khi đó bất phương trình trở thành

$ab\geq a-b^2+1\Leftrightarrow \left(a+1\right)\left(b-1\right)\geq 0\Leftrightarrow b\geq 1\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x}}\geq 1$ luôn đúng với $x>0$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(0,+\infty\right)$.

Bài 12. Giải phương trình $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+7x+10}\right)=3$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải :

Điều kiện : $x \ge -2$

Khi đó phương trình tương đương với :

$$\frac{3}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x+2}}\left(1+\sqrt{x^2+7x+10}\right)=3 \Leftrightarrow 1+\sqrt{x^2+7x+10}=\sqrt{x+5}+\sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+5}-1\right)\left(\sqrt{x+2}-1\right)=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=-4$$

Đối chiếu với điều kiện suy ra phương trình có nghiệm duy nhất $x=-1$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các phương trình, bất phương trình sau :

1.1. $\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\right)\left(1-\sqrt{x^2-x-2}\right)=3$

1.2. $\sqrt{x-x^2}+\sqrt{1-x}=1+(1-x)\sqrt{x}$

1.3. $\sqrt{3x^2-18x+25}+\sqrt{4x^2-24x+29}=6x-x^2-4$

1.4. $\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x}=1+\sqrt{1-x^3}$

PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải phương trình sau : $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2$

Lời giải :

Điều kiện : $\begin{cases} x-\sqrt{x^2-1}\ge 0 \\ x+\sqrt{x^2-1}\ge 0 \\ x^2-1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 1.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta có, $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}.\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=1$. Đặt $t=\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}$

Khi đó phương trình trở thành : $t+\frac{1}{t}=2\Leftrightarrow(t-1)^2=0\Leftrightarrow t=1$

$\Leftrightarrow\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}=1\Leftrightarrow x-\sqrt{x^2-1}=1\Leftrightarrow x^2-1=(x-1)^2\Leftrightarrow x=1.$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 2. Giải phương trình sau : $2x^2-6x-1=\sqrt{4x+5}$

<u>Lời giải :</u>

Điều kiện : $x\geq-\frac{5}{4}$.

Dặt $t=\sqrt{4x+5}\geq0\Rightarrow x=\frac{t^2-5}{4}$, khi đó phương trình trở thành :

$$2\left(\frac{t^2-5}{4}\right)^2-6\left(\frac{t^2-5}{4}\right)-1=t\Leftrightarrow t^4-22t^2-8t+27=0.$$

$$\Leftrightarrow\left(t^2+2t-27\right)\left(t^2-2t-11\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1+2\sqrt{2}\\t=1+2\sqrt{3}\end{array}\right.\text{ (do } t\geq0\text{).}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1-\sqrt{2}\\x=2+\sqrt{3}\end{array}\right..$$

Bài 3. Giải phương trình sau : $x+\sqrt{5+\sqrt{x-1}}=6$

<u>Lời giải :</u>

Điều kiện : $1\leq x\leq6$.

Đặt $t=\sqrt{x-1}\geq0\Rightarrow x=t^2+1$, khi đó phương trình trở thành :

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\sqrt{5+t}=5-t^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 5+t=\left(5-t^2\right)^2 \\ 0\le t\le\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(t^2+t-4\right)\left(t^2-t-5\right)=0 \\ 0\le t\le\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{11-\sqrt{17}}{2}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{11-\sqrt{17}}{2}$.

Bài 4. Giải phương trình sau : $x^2+2x\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=3x+1$.

<u>Lời giải :</u>

Điều kiện : $-1\le x<0$.

Chia cả hai vế của phương trình cho x, ta được :

$$x+2\sqrt{x-\frac{1}{x}}=3+\frac{1}{x}$$

Dặt $t=\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}\ge 0$ phương trình trở thành : $t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow \sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

(do $t\ge 0$).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Bài 5. Giải phương trình sau: $x^2+\sqrt[3]{x^4-x^2}=2x+1$

<u>Lời giải:</u>

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình, chia hai vế phương trình cho $x\ne 0$, ta được:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$x+\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}=2+\frac{1}{x}\Leftrightarrow\left(1-\frac{1}{x}\right)+\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}-2=0$.

Đặt $t=\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}\Rightarrow$ phương trình trở thành:

$t^3+t-2=0\Leftrightarrow(t-1)\left(t^2+t+2\right)=0\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}=1\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Bài 6. Giải phương trình sau: $x^4+2x^3+2x^2-2x+1=\left(x^3+x\right)\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}$

Lời giải:

Điều kiện: $x\in(-\infty,-1)\cup(0,1]$.

Ta có $VT=x^4+2x^3+2x^2-2x+1=\left(x^2+x\right)^2+(x-1)^2>0$

Và $VP=\left(x^3+x\right)\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}=x\left(x^2+1\right)\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}$ do đó phương trình có nghiệm thì $x\in(0;1]$.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$x^4+2x^3+2x^2-2x+1=\left(x^3+x\right)\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}$

$\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)^2-2x\left(1-x^2\right)=\left(x^2+1\right)\sqrt{x\left(1-x^2\right)}$

Nhận thấy $x=1$ không là nghiệm của phương trình, nên chia hai vế phương trình cho $\sqrt{x\left(1-x^2\right)}$ ta được:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\frac{x^2+1}{\sqrt{x(1-x^2)}}-2\frac{\sqrt{x(1-x^2)}}{x^2+1}=1(*)$, ta đặt $t=\frac{x^2+1}{\sqrt{x(1-x^2)}}>0$, khi đó phương trình (*) trở thành:

$t-\frac{2}{t}=1\Leftrightarrow t^2-t-2=0\Leftrightarrow t=2>0$.

Khi đó $\frac{x^2+1}{\sqrt{x(1-x^2)}}=2\Leftrightarrow(x^2+1)^2=4x(1-x^2)\Leftrightarrow(x^2+2x-1)^2=0\Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{2}$

Do $x\in(0,1)$ nên chỉ có nghiệm $x=-1+\sqrt{2}$ thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=-1+\sqrt{2}$.

Bài 7. Giải phương trình sau: $x^3+\sqrt{(1-x^2)^3}=x\sqrt{2(1-x^2)}$

Lời giải:

Điều kiện: $-1\le x\le 1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(x^2-x\sqrt{1-x^2}+1-x^2\right)=x\sqrt{2(1-x^2)}$ (*).

Đặt $t=x+\sqrt{1-x^2}\Rightarrow x\sqrt{1-x^2}=\frac{t^2-1}{2}$, khi đó phương trình (*) trở thành:

$t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)=\sqrt{2}\frac{t^2-1}{2}\Leftrightarrow t^3+\sqrt{2}t^2-3t-\sqrt{2}=0$

$\Leftrightarrow\left(t-\sqrt{2}\right)\left(t^2+2\sqrt{2}t+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{2}\\t^2+2\sqrt{2}t+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{2}\\t=-\sqrt{2}\pm1\end{array}\right.$

(i). Với $t=\sqrt{2}\Leftrightarrow x+\sqrt{1-x^2}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{2}-x=\sqrt{1-x^2}\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}-x\right)^2=1-x^2$

$\Leftrightarrow 2x^2-2\sqrt{2}x+1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

(ii). Với $t=-\sqrt{2}-1 \Leftrightarrow x+\sqrt{1-x^2}=-\sqrt{2}-1$, vô nghiệm do $VT \ge -1 > VP$.

(iii). Với $t=-\sqrt{2}+1 \Leftrightarrow x+\sqrt{1-x^2}=-\sqrt{2}+1 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}=-\sqrt{2}+1-x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le -\sqrt{2}+1 \\ 1-x^2=\left(-\sqrt{2}+1-x\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=\frac{\sqrt{2}}{2}, x=\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$.

Bài 8. Giải phương trình sau: $(13-4x)\sqrt{2x-3}+(4x-3)\sqrt{5-2x}=2+8\sqrt{16x-4x^2-15}$

<u>Lời giải:</u>

Điều kiện: $\frac{3}{2} \le x \le \frac{5}{2}$.

Khi đó phương trình tương đương với:

$$7\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}\right)-2\left((2x-3)\sqrt{2x-3}+(5-2x)\sqrt{5-2x}\right)=2+8\sqrt{(5-2x)(2x-3)} \quad (*)$$

Đặt $t=\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x} \Rightarrow \sqrt{(2x-3)(5-2x)}=\frac{t^2-2}{2}$, khi đó phương trình (*) trở thành:

$t^3-4t^2+t+6=0 \Leftrightarrow (t-2)\left(t^2-2t-3\right)=0 \Leftrightarrow t=2>0$

Khi đó $\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}=2 \Leftrightarrow x=2$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

Bài 9. Giải phương trình: $10x^2+3x+1=(1+6x)\sqrt{x^2+3}$

<u>Lời giải:</u>

Đặt $u=1+6x; v=\sqrt{x^2+3}$ khi đó phương trình đã cho trở thành

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\frac{1}{4}u^2+v^2-\frac{9}{4}=uv \Leftrightarrow (u-2v)^2=9 \Leftrightarrow u-2v=\pm 3$

❖ Với $u-2v=3$, ta được: $1+6x-2\sqrt{x^2+3}=3$

$\Leftrightarrow 3x-1=\sqrt{x^2+3} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1\ge 0 \\ x^2+3=(3x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

❖ Với $u-2v=-3$, ta được:

$1+6x-2\sqrt{x^2+3}=-3 \Leftrightarrow 3x+2=\sqrt{x^2+3} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2\ge 0 \\ x^2+3=(3x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{7}-3}{4}$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=1; x=\frac{\sqrt{7}-3}{4}$.

Bài 10. Giải phương trình: $2\left(2\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)-\sqrt{1-x^4}=3x^2+1$

Lời giải:

Điều kiện: $|x|\le 1$

Đặt $a=\sqrt{1+x^2}; b=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow 3x^2+1=2\left(1+x^2\right)-\left(1-x^2\right)=2a^2-b^2$

Khi đó phương trình trở thành:

$2(2a-b)-ab=2a^2-b^2 \Leftrightarrow 2a^2+a(b-4)+2b-b^2=0$

Coi đây là phương trình bậc hai với ẩn là a, ta được:

$$\Delta_a=(b-4)^2-8\left(2b-b^2\right)=(3b-4)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=\frac{4-b+3b-4}{4}=\frac{b}{2} \\ a=\frac{4-b-3b+4}{4}=2-b \end{array}\right.$$

❖ Với $a=\frac{b}{2} \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}$ VN

❖ Với $a=2-b \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}=2-\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}=2$

$\Leftrightarrow 2+2\sqrt{1-x^4}=4 \Leftrightarrow x=0$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 11. Giải bất phương trình: $27\sqrt{5+2x}+27\sqrt{4-2x}\ge\left(4x+1\right)^2$

Lời giải:

Điều kiện: $-\frac{5}{2}\le x\le 2$.

Khi đó đặt $\begin{cases}u=\sqrt{5+2x}\\ v=\sqrt{4-2x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u^2+v^2=9\\ 3\le u+v\le\sqrt{2\left(5+2x+4-2x\right)}=3\sqrt{2}\end{cases}$ (*)

Bất phương trình trở thành:

$27\left(u+v\right)\ge\left(u^2-v^2\right)^2\Leftrightarrow 27\ge\left(u-v\right)^2\left(u+v\right)=\left(u+v\right)\left(18-\left(u+v\right)^2\right)$

$\Leftrightarrow\left(u+v-3\right)\left(\left(u+v\right)^2+3\left(u+v\right)-9\right)\ge 0$, luôn đúng do (*)

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[-\frac{5}{2},2\right]$.

Bài 12. Giải bất phương trình $\sqrt[3]{7x-8}+1\ge\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2$

Lời giải:

Điều kiện: $x\ge\frac{1}{2}$, khi đó ta đặt $t=\sqrt{2x-1}\ge 0$

Khi đó bất phương trình tương đương với

$\sqrt[3]{\frac{7t^2-9}{2}}+1\ge\left(t-1\right)^2\Leftrightarrow\sqrt[3]{\frac{7t^2-9}{2}}\ge t^2-2t\Leftrightarrow\frac{7t^2-9}{2}\ge\left(t^2-2t\right)^3$

$\Leftrightarrow 2t^6-12t^5+24t^4+16t^3-7t^2+9\le 0$

$\Leftrightarrow\left(t-1\right)\left(t-3\right)\left(2t^4-4t^3+2t^2+4t+3\right)\le 0$

Với $t\ge 0\Rightarrow 2t^4-4t^3+2t^2+4t+3=\left(2t^4+2t^2-4t^3\right)+4t+3$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$= 2t^2(t-1)^2 + 4t + 3 > 0$

Vậy $(t-1)(t-3) \le 0 \Leftrightarrow 1 \le t \le 3 \Leftrightarrow 1 \le \sqrt{2x-1} \le 3 \Leftrightarrow 1 \le x \le 5$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [1,5]$

Bài 12. Giải bất phương trình $x^2 + 12x < 8\sqrt{x^3 + 3x} - 3$

Lời giải:

Điều kiện $x \ge 0$, khi đó đặt $a = \sqrt{x^2+3}; b = \sqrt{x}$; bất phương trình trở thành

$a^2 + 12b^2 < 8ab \Leftrightarrow (a-2b)(a-6b) < 0 \Leftrightarrow 2b < a < 6b$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} < \sqrt{x^2+3} < 6\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{3}{35}} \le x \le 1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[\sqrt{\frac{3}{35}}, 1\right]$

Bài 13. Giải phương trình $2\left(5x + 3\sqrt{x^2+x-2}\right) = 3\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} + 27$

Lời giải:

Điều kiện: $x \ge 1$

Khi đó đặt $t = 3\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} \Rightarrow t^2 = 10x - 7 + 6\sqrt{x^2+x-2}$

Khi đó phương trình trở thành

$t^2 - t - 20 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 5 \\ t = -4 \end{array}\right.$

Nhưng do $t > 0$ nên chỉ nhận nghiệm $t = 5 \Rightarrow x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các phương trình, bất phương trình sau:

1.1. $\sqrt{3-x+x^2} - \sqrt{2+x-x^2} = 1$

1.2. $\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} + \sqrt{(x+1)(4-x)} = 0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.3. $\dfrac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}}{2} \le x-2+\sqrt{x^2-4}$

1.4. $\sqrt{5x^2+10x+1} \ge 7-2x-x^2$

1.5. $x=\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$

1.6. $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6}=3$

1.7. $x+\sqrt{4-x^2}=2+3x\sqrt{4-x^2}$

1.8. $\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x} \ge 2-x^2$

1.9. $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$

1.10. $(x-1)(x+3)+2(x-1)\sqrt{\dfrac{x+3}{x-1}}=8$

1.11. $x+\sqrt{x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{x+\dfrac{1}{4}}}=2$

1.12. $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}=x$

1.13. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$

1.14. $\sqrt[3]{(x+1)^2}+4\sqrt[3]{(x-1)^2}=6\sqrt[3]{x^2-1}$

1.15. $\dfrac{(34-x)\sqrt[3]{x+1}-(x+1)\sqrt[3]{34-x}}{\sqrt[3]{34-x}-\sqrt[3]{x+1}}=30$

1.16. $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}-2\sqrt{x(1-x)}-2\sqrt[4]{x(1-x)}=-1$

1.17. $\sqrt{8x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{7x+4}+\sqrt{2x-2}$

1.18. $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}$

1.19. $\sqrt{\dfrac{x^3}{3-4x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}$

1.20. $\sqrt{x+1}+6\sqrt{9-x^2}+6\sqrt{(x+1)(9-x^2)}=38+10x-2x^2-x^3$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.21. $\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+...+2\sqrt{3x}}}}=x$

1.22. $x^2\left(7-2\sqrt[3]{-3x^3+3x^2+x}\right)=13x-8$

1.23. $\sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x-2012}}}}=2012$

1.24. $\left(1+x+\sqrt{x^2-1}\right)^{2012}+\left(1+x-\sqrt{1-x^2}\right)^{2012}=2^{2013}$

1.25. Giải các bất phương trình:

1. $3\sqrt{x}+\dfrac{3}{2\sqrt{x}}<2x+\dfrac{1}{2x}-7$

2. $\sqrt{5x^2+10x+1}\ge 7-x^2-2x$

1.26. Giải các phương trình, bất phương trình sau:

1. $\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}+\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}\ge\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

2. $4\sqrt[3]{(x+2)^2}-7\sqrt[3]{4-x^2}+3\sqrt[3]{(2-x)^2}=0$

1.27. $\sqrt{36x^2-63x+27}=15x-27+2\sqrt{9x^2-9x+3}$

1.28. $\left(6x^2-x-2\right)\sqrt{3x^2-4x+1}=\left(10x^2-11x+4\right)\sqrt{x^2+x-1}$

Đặt $a=\sqrt{3x^2-4x+1}, b=\sqrt{x^2+x-1}$ và suy ra

$6x^2-x-2=ma^2+nb^2; 10x^2-11x+4=pa^2+qb^2$ đưa về phương trình đẳng cấp bậc ba.

PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ ĐƯA VỀ HỆ

Phương pháp:

Khi gặp phương trình có dạng $F\left(f(x),\sqrt[m]{a+f(x)},\sqrt[n]{b-f(x)}\right)=c$. Ta có thể giải phương trình này bằng cách đặt $\begin{cases} u=\sqrt[m]{a+\alpha f(x)} \\ v=\sqrt[n]{b-\beta f(x)}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f(u,v)=c \\ \beta u^m+\alpha v^n=a\beta+b\alpha\end{cases}$

BÀI TẬP MẪU

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 1. Giải phương trình sau: $x\sqrt[3]{35-x^3}\left(x+\sqrt[3]{35-x^3}\right)=30$

Lời giải:

Đặt $y=\sqrt[3]{35-x^3}\Rightarrow x^3+y^3=35$

Và phương trình ban đầu trơ thành: $xy\left(x+y\right)=30$, từ đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}x^3+y^3=35\\xy\left(x+y\right)=30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x+y\right)^3-3xy\left(x+y\right)=35\\xy\left(x+y\right)=30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=5\\xy=6\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2,y=3\\x=3,y=2\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hia nghiệm là $x=2,x=3$.

Bài 2. Giải phương trình sau: $2\sqrt[3]{3x-2}+3\sqrt{6-5x}-8=0$

Lời giải:

Điều kiện: $x\le\frac{6}{5}$

Đặt $u=\sqrt[3]{3x-2};v=\sqrt{6-5x}\ge0$

$$\Rightarrow\begin{cases}u^3=3x-2\\v^2=6-5x\end{cases}\Rightarrow5u^3+3v^2=5(3x-2)+3(6-5x)=8(1)$$

Mặt khác ta lại có: $2u+3v-8=0(2)$

$$(1)\ \&\ (2)\Rightarrow5u^3+3(\frac{8-2u}{3})^2-8=0\Leftrightarrow45u^3+12u^2-96u+120=0$$

$$\Leftrightarrow(u+2)(45u^2-78u+60)=0\Leftrightarrow u=-2\Rightarrow v=4(TM)\Rightarrow\sqrt[3]{3x-2}=-2\Leftrightarrow x=-2$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: $x=-2$.

Bài 3. Giải phương trình sau: $x+\sqrt{5+\sqrt{x-1}}=6$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Điều kiện: $x \geq 1$.

Đặt $u=\sqrt{x-1}, v=\sqrt{5+\sqrt{x-1}}$ khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} u^2+v=5 \\ v^2-u=5 \end{cases} \Rightarrow\Rightarrow u^2+u+v-v^2=0 \Leftrightarrow (u+v)(u-v+1)=0 \Leftrightarrow u-v+1=0$$

Khi đó $\sqrt{x-1}+1=\sqrt{5+\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=5-x \Leftrightarrow x=\dfrac{11-\sqrt{17}}{2}$.

Vậy phương tình có nghiệm là $x=\dfrac{11-\sqrt{17}}{2}$.

Bài 4. Giải phương tình sau: $\dfrac{4}{x}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=x+\sqrt{2x-\dfrac{5}{x}}$

Lời giải:

Điều kiện: $x \in [-1;0) \cup \left[\sqrt{\dfrac{5}{2}},+\infty\right)$.

Đặt $u=\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}; v=\sqrt{2x-\dfrac{5}{x}}, u \geq 0, v \geq 0$. Ta được $u-v=x-\dfrac{4}{x}(i)$.

Ta lại có $v^2-u^2=\left(2x-\dfrac{5}{x}\right)-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=x-\dfrac{4}{x}(ii)$

Từ (i) và (ii) ta suy ra: $v^2-u^2=u-v \Leftrightarrow (u-v)(u+v+1)=0 \Leftrightarrow u=v$, do $u,v \geq 0$.

Vậy phương trình tương đương với :

$\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=\sqrt{2x-\dfrac{5}{x}} \Leftrightarrow x-\dfrac{4}{x}=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$. So sánh với điều kiện thì chỉ có nghiệm $x=2$ thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

Bài 5. Giải phương trình sau : $\sqrt[3]{24-x}+\sqrt{12-x}=6$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải :

Điều kiện : $x \le 12$.

Đặt $u = \sqrt[3]{24+x}, v = \sqrt{12-x}$. Ta được $u+v=6$ (1)

Lại có $u^3+v^2=36$ (2). Thay $v=6-u$ từ (1) vào (2) ta được :

$$u^3+u^2-12u=0 \Leftrightarrow u(u-3)(u+4)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=0 \\ u=3 \\ u=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-24 \\ x=3 \\ x=-88 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có ba nghiệm là $\{-88,-24,3\}$.

Bài 6. Giải phương trình: $8x^2-13x+7=\left(1+\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{(x+1)(2x-1)+x^2-x-1}$

Lời giải:

Phương trình đã cho tương đương với: $8x^3-13x^2+7x=(x+1)\sqrt[3]{3x^2-2}$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^3-(x^2-x-1)=(x+1)\sqrt[3]{(x+1)(2x-1)+(x^2-x-1)}$$

Đặt $u=2x-1, v=\sqrt[3]{3x^2-2}$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3-(x^2-x-1)=(x+1)v \\ v^3-(x^2-x-1)=(x+1)u \end{cases}$$

Trừ theo vế hai phương trình trong hệ ta được:

$$(u-v)(u^2+uv+v^2+x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u^2+uv+v^2+x+1=0 \end{array}\right.$$

- Với $u=v \Leftrightarrow 2x-1=\sqrt[3]{3x^2-2} \Leftrightarrow (x-1)^2(8x+1)=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-\frac{1}{8}$

- Với $u^2+uv+v^2+x+1=0 \Leftrightarrow \left(v+\frac{u}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(2x-1)^2+x+1=0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\Leftrightarrow 4\left(v+\frac{u}{2}\right)^2+4x^2+2(2x-1)^2+5=0$, phương trình này vô nghiệm.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=1; x=-\frac{1}{8}$.

Bài 7. Giải phương trình: $x^2+3\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x^4-x^2+1}$

Lời giải:

Đặt $u=x^2, v=\sqrt{x^2-1}; u,v\ge 0$, khi đó phương trình trở thành

$$u+3v=\sqrt{u^2-v^2}\Leftrightarrow 10v^2+6uv=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}v=0\\ v=-\frac{3}{5}u\end{array}\right.$$

Do $u,v\ge 0$ nên chỉ nhận nghiệm $v=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2-1}=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Thử lại ta thấy các nghiệm này thỏa mãn.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=\pm 1$.

Bài 8. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x^2+4x+1}$

Lời giải:

Điều kiện: $x\ge\frac{1}{2}$.

Khi đó bình phương hai vế của phương trình ta được:

$$\sqrt{(x^2+2x)(2x-1)}=x^2+1\Leftrightarrow\sqrt{(x^2+2x)(2x-1)}=(x^2+2x)-(2x-1)$$

Đặt $u=\sqrt{x^2+2x}, v=\sqrt{2x-1}; u,v\ge 0$, khi đó ta có phương trình:

$uv=u^2-v^2\Leftrightarrow u=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}v$, nhưng do $u,v\ge 0$ nên $u=\frac{1+\sqrt{5}}{2}v$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2x}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow x^2+2x=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2(2x-1)\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 9. Giải phương trình $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt[4]{1+x}$

Lời giải:

Điều kiện: $0\le x\le 1$

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình

Xét với $0<x\le 1$

Khi đó chia cả hai vế của phương trình cho $\sqrt[4]{x}$ ta được phương trình

$$1+\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}=\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}\Leftrightarrow \sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}=1$$

Đặt $u=\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}};v=\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}$ khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases}u-v=1\\u^4+v^4=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u-v=1\\\left(u^2+v^2\right)^2-2u^2v^2=2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u-v=1\\\left(\left(u-v\right)^2+2uv\right)^2-2u^2v^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u-v=1\\2u^2v^2+4uv-1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u=v+1\\uv=-1+\frac{\sqrt{6}}{2}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\dfrac{\sqrt{4\sqrt{\frac{\sqrt{6}}{2}}-3}+1}{2}\\v=\dfrac{\sqrt{4\sqrt{\frac{\sqrt{6}}{2}}-3}-1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{4\sqrt{\frac{\sqrt{6}}{2}}-3}+1}{2}\right)^4-1}$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các phương trình, bất phương trình sau:

1.1. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}+x}+\sqrt{\frac{1}{2}-x}=1$

1.2. $\sqrt{x-5}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-5}\right)^3-2=0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.3. $\sqrt[4]{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2$

1.4. $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x}=1$

1.5. $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$

1.6. $(x+5)\sqrt{x+1}+1=\sqrt[3]{3x+4}$

1.7. $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=4x-9+2\sqrt{3x^2-5x+2}$

1.8. $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x^2+4x+1}$

1.9. $\sqrt{5x^2-14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$

1.10. $7\sqrt{3x-7}+(4x-7)\sqrt{7-x}=32$

1.11. $(9x-2)\sqrt{3x-1}+(10-9x)\sqrt{3-3x}-4\sqrt{-9x^2+12x-3}=4$

1.12. $(2x-6)\sqrt{x+4}-(x-5)\sqrt{2x+3}=3(x-1)$

1.13. $\sqrt{6x^2-40x+150}-\sqrt{4x^2-60x+100}=2x-10$

1.14. $\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt[3]{x^3-14}=x-2$

1.15. $2\left(2\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)-\sqrt{1-x^4}=3x^2+1$

1.16. $\sqrt{1-x^2}+\sqrt[4]{x^2+x-1}+\sqrt[6]{1-x}-1=0$

1.17. $2\left(x^2+x-1\right)^2+2x^2+2x=3+\sqrt{4x+5}$

PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Phương pháp :

Khi gặp các phương trình có dạng

(i). $ax^2+bx+c=(mx+n)\sqrt{px+q}$

(ii). $ax^2+bx+c=(mx+n)\sqrt{px^2+qx+r}$

(iii). $ax^3+bx^2+cx+d=(mx+n)\sqrt{ax^3+qx^2+rx+s}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta thường đặt $\left[\begin{array}{l}\sqrt{px+q}=t \\ \sqrt{px^2+qx+r}=t \\ \sqrt{ax^3+qx^2+rx+s}=t\end{array}\right.$ và chuyển phương trình về dạng

$\alpha t^2-(mx+n)t+g(x)=0(*)$

Việc bây giờ của chúng ta là giải phương trình (*), tức tìm α sao cho biệt thức Δ là số chính phương.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải phương trình : $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3}=x^2+1$

<u>Lời giải :</u>

Đặt $t=\sqrt{x^2-2x+3}$, khi đó phương trình trở thành

$(x+1)t=x^2+1\Leftrightarrow (x^2-2x+3)-(x+1)t+2x-2=0\Leftrightarrow t^2-(x+1)t+2x-2=0(*)$

Phương trình (*) có $\Delta=(x-3)^2$, nên (*) có hai nghiệm

$\left[\begin{array}{l}t=2 \\ t=x-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2-2x+3}=2 \\ \sqrt{x^2-2x+3}=x-1\end{array}\right.\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2}$.

Bài 2. Giải phương trình : $x^2+\left(3-\sqrt{x^2+2}\right)x=1+2\sqrt{x^2+2}$

<u>Lời giải :</u>

Đặt $t=\sqrt{x^2+2}$, khi đó phương trình trở thành :

$x^2-(x+2)t+3x-1=0\Leftrightarrow \alpha t^2-(x+2)t+x^2+3x-1-\alpha\left(x^2+2\right)=0$

$\Leftrightarrow \alpha t^2-(x+2)t+(1-\alpha)x^2+3x-1-2\alpha=0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Phương trình này có biệt thức $\Delta=\left(4\alpha^2-4\alpha+1\right)x^2+\left(4-12\alpha\right)x+4\alpha\left(1+2\alpha\right)+4=0$, nhận thấy $\alpha=1\Rightarrow\Delta=\left(x-4\right)^2$.

Vậy phương trình ban đầu tương đương với

$$t^2-\left(x+2\right)t-3-3x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=x-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+2}=3\\\sqrt{x^2+2}=x-1\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{7}.$$

Bài 3. Giải phương trình : $4\sqrt{x+1}-1=3x+2\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x^2}$

<u>Lời giải :</u>

Điều kiện : $-1\le x\le 1$.

Đặt $t=\sqrt{1-x}$, khi đó phương trình trở thành : $4\sqrt{x+1}=3x+2t+t\sqrt{1+x}+1$

$\Leftrightarrow -t^2+\left(\sqrt{x+1}+2\right)t+2x-4\sqrt{x+1}+2=0$ (*)

Phương trình này có biệt thức $\Delta=\left(3\sqrt{x+1}-2\right)^2$, do đó phương trình (*) có hai nghiệm là

$$\left[\begin{array}{l}t=2\sqrt{x+1}\\t=\sqrt{x+1}-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{1-x}=2\sqrt{x+1}\\\sqrt{1-x}=\sqrt{x+1}-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{3}{5}\\x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có ba nghiệm là $x=-\dfrac{3}{5};x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Bài 4. Giải phương trình : $\sqrt{x^2-x+1}=\dfrac{x^3+2x^2-3x+1}{x^2+2}$

<u>Lời giải:</u>

Phương trình đã cho tương đương với :

$$\sqrt{x^2-x+1}=\frac{x^3+x^2-2x+\left(x^2-x+1\right)}{x^2+2}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Đặt $t=\sqrt{x^2-x+1}$, khi đó phương trình trở thành :

$$\left(x^2+2\right)t=x^3+x^2-2x+t^2\Leftrightarrow t^2-\left(x^2+2\right)t+x^3+x^2-2x=0$$

Coi đây là phương trình bậc hai với ẩn là t, ta có

$$\Delta_t=\left(x^2+2\right)^2-4\left(x^3+x^2-2x\right)=\left(x^2-2x-2\right)^2$$

Từ đó suy ra: $\left[\begin{array}{l}t=x^2-x\\t=x+2\end{array}\right.$

❖ Với $t=x^2-x\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x+1}=x^2-x\Leftrightarrow t=t^2-1\Leftrightarrow t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\ge 0$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x+1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow x^2-x+1=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\Leftrightarrow 2x^2-2x-\left(1+\sqrt{5}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{3+2\sqrt{5}}}{2}.$$

❖ Với $t=x+2\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x+1}=x+2\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\x^2-x+1=\left(x+2\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{5}.$

Vậy phương trình có ba nghiệm : $x=-\dfrac{3}{5},x=\dfrac{1\pm\sqrt{3+2\sqrt{5}}}{2}$.

Bài 5. Giải phương trình $\left(3x+1\right)\sqrt{2x^2-1}=5x^2+\dfrac{3x}{2}-3$

Lời giải:

Điều kiện $2x^2-1\ge 0$

Đặt $t=\sqrt{2x^2-1}\Rightarrow x^2=\dfrac{t^2+1}{2}$ và phương trình được đưa về dạng

$$\left(3x+1\right)t=5x^2+\frac{3}{2}x-3\Leftrightarrow mx^2+\left(5-m\right)x^2+\frac{3}{2}x-3-\left(3x+1\right)t=0$$

$$\Leftrightarrow m\frac{t^2+1}{2}+\left(5-m\right)x^2+\frac{3}{2}x-3-\left(3x+1\right)t=0$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow m\frac{t^2}{2}+(5-m)x^2-(3x+1)t+\frac{3}{2}x-3+\frac{m}{2}=0\ (*)$$

Coi (*) là phương trình bậc hai ẩn t, tính delta:

$\Delta=(3x+1)^2-2m\left((5-m)x^2+\frac{3}{2}x-3+\frac{m}{2}\right)$ là số chính phương, tìm được $m=4$.

Các bạn tự giải tiếp nha!

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các phương trình, bất phương trình sau :

1.1. $(4x-1)\sqrt{x^2+1}=2x^2+2x+1$

1.2. $\sqrt{x^2-x+1}=\dfrac{x^3+2x^2-3x+1}{x^2+2}$

1.3. $4x^2-7x+x\sqrt{5+x-2x^2}=1$

1.4. $x^2+(2x+3)\sqrt{3x^2+6x+2}=6x+5$

1.5. $x^2+(2x+3)\sqrt{3x^2+6x+2}=6x+5$

1.6. $(3x-5)\sqrt{2x^2-3}=4x^2-6x+1$

PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

<u>Phương pháp:</u>

- Sử dụng tính đơn điệu của hàm số :

Giả sử biến đổi phương trình về dạng $f(x)=f(t)$ (*), trên miền xác định D xét tính đơn điệu của hàm số $f(t)$. Nếu $f(t)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên D thì phương trình (*) tương đương với $x=t$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

- Dùng bất đẳng thức đánh giá(Các bất đẳng thức xem ***Chuyên đề GTLN-GTNN và chứng minh bất đẳng thức***).
-

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải phương trình $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+8}=-x^3+1$

Lời giải:

- Với $x>0$ thì Vế trái lớn hơn 1, Vế phải nhỏ hơn 1
- Với $x<0$ thì Vế trái nhỏ hơn 1, Vế phải lớn hơn 1
- Nhận thấy $x=0$ là nghiệm của phương trình

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$

Bài 2. Giải phương trình $\sqrt{3x^2+6x+12}+\sqrt{5x^4-10x^2+9}=-2x\left(x+2\right)+3$

Lời giải:

$$VT=\sqrt{3x^2+6x+12}+\sqrt{5x^4-10x^2+9}=\sqrt{3\left(x+1\right)^2+9}+\sqrt{5\left(x^2-1\right)^2+4}\ge\sqrt{9}+\sqrt{4}=5$$
$$VP=-2x\left(x+2\right)+3=-2\left(x+1\right)^2+5\le 5$$

Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $VT=VP=5\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x-1\right)^2=0\\\left(x^2-1\right)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$

Bài 3. Giải phương trình sau: $\left(2x+1\right)\left(2+\sqrt{4x^2+4x+4}\right)+3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Phương trình tương đương với

$$(2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right)=-3x\left(2+\sqrt{(-3x)^2+3}\right)\Leftrightarrow f(2x+1)=f(-3x)\ (*).$$

Ta xét hàm số $f(t)=t\left(2+\sqrt{t^2+3}\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có

$f'(t)=2+\sqrt{t^2+3}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+3}}>0$, suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó phương trình (*) tương đương với : $2x+1=-3x\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{5}$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{1}{5}$.

Bài 4. Giải phương trình sau : $\sqrt[3]{6x+1}=8x^3-4x-1$

Lời giải :

Phương trình tương đương với

$$6x+1+\sqrt[3]{6x+1}=(2x)^3+2x\Leftrightarrow f(2x)=f(\sqrt[3]{6x+1})\ (*).$$

Ta xét hàm số $f(t)=t^3+t$ lên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=3t^2+1>0$, suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nên phương trình (*) tương đương với : $2x=\sqrt[3]{6x+1}\Leftrightarrow 8x^3-6x-1=0$.

Giải phương trình bằng cách đặt $x=\cos t, t\in[0,\pi]$, khi đó phương trình trở thành:

$$2\left(4\cos^3 t-3\cos t\right)-1=0\Leftrightarrow \cos 3t=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3t=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ 3t=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{\pi}{9}\\ t=\dfrac{7\pi}{9}\\ t=\dfrac{5\pi}{9}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\cos\dfrac{\pi}{9}\\ x=\cos\dfrac{5\pi}{9}\\ x=\cos\dfrac{7\pi}{9}\end{array}\right.$$

Do là phương trình bậc ba nên có tối đa 3 nghiệm, vậy nên phương trình có ba nghiệm như trên:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy phương trình có 3 nghiệm là $x \in \left\{\cos\frac{\pi}{9}, \cos\frac{5\pi}{9}, \cos\frac{7\pi}{9}\right\}$.

Bài 5. Giải phương trình sau : $\sqrt[3]{(x-1)^2} - 2\sqrt[3]{x-1} - (x-5)\sqrt{x-8} - 3x + 31 = 0$

Lời giải :

Điều kiện : $x \geq 8$.

Khi đó phương trình tương đương với :

$$x - 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2} - 2\sqrt[3]{x-1} = \left(\sqrt{x-8}+1\right)^3 + \left(\sqrt{x-8}+1\right)^2 - 2\left(\sqrt{x-8}+1\right)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2 - 2t$, ta có $f'(t) = 3t^2 + 2t - 2 > 0, \forall t \in [1, +\infty)$. Nên $f(t)$ đồng biến.

Phương trình có dạng $f(\sqrt[3]{x-1}) = f(\sqrt{x-8}+1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1} = \sqrt{x-8} + 1$

Đặt $u = \sqrt[3]{x-1}$, ta được phương trình : $u - 1 = \sqrt{u^3 - 7}$

$$\Leftrightarrow u^3 - u^2 + 2u - 8 = 0 \Leftrightarrow (u-2)\left(u^2 + u + 4\right) = 0 \Leftrightarrow u = 2 \Leftrightarrow x = 9$$

Bài 6. Giải bất phương trình sau : $3\sqrt{3-2x} + \frac{5}{\sqrt{2x-1}} - 2x \leq 6$

Lời giải :

Điều kiện : $\frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{2}$.

Ta xét hàm số $f(x) = 3\sqrt{3-2x} + \frac{5}{\sqrt{2x-1}} - 2x - 6$ trên $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

Ta có $f'(x) = \frac{-3}{\sqrt{3-2x}} - \frac{5}{\left(\sqrt{2x-1}\right)^3} - 2 < 0$, suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

Nhận thấy $f(1) = 0$. Do đó bất phương trình tương đương với : $f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow x \geq 1$.

Kết hợp với điều kiện ta suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[1, \frac{3}{2}\right]$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 7. Giải phương trình sau : $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{2x^2+1}+\sqrt[3]{2x^2}$

Lời giải :

Đặt $u=\sqrt[3]{x+1}, v=\sqrt[3]{2x^2}$, khi đó phương trình trở thành :

$\sqrt[3]{u^3+1}+u=\sqrt[3]{v^3+1}+v \Leftrightarrow f(u)=f(v)$

Ta xét hàm số $f(t)=\sqrt[3]{t^3+1}+t$, ta có $f'(t)=\dfrac{t^2}{\sqrt[3]{\left(t^3+1\right)^2}}+1>0$ nên $f(t)$ đồng biến. do đó

phương trình tương đương với $u=v \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{2x^2} \Leftrightarrow x=1 \vee x=-\dfrac{1}{2}$.

Bài 8. Giải phương trình sau : $\dfrac{1}{2}\log_2(x+2)+x+3=\log_2\dfrac{2x+1}{x}+\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2+2\sqrt{x+2}$

Lời giải :

Điều kiện : $x\in\left(-2,-\dfrac{1}{2}\right)\cup(0,+\infty)$.

Khi đó phương trình tương đương với

$\log_2\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+2}+x+2=\log_2\left(2+\dfrac{1}{x}\right)-2\left(2+\dfrac{1}{x}\right)+\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^2$

$\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+2}\right)=f\left(2+\dfrac{1}{x}\right)$ (*)

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t-2t+t^2$ trên khoảng $(0,+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+2t-2\ge 2\sqrt{\dfrac{1}{t\ln 2}.2t}-2>0$, nê hàm số đồng biến. do đó phương trình (*) tương đương với :

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\sqrt{x+2}=2+\frac{1}{x}\Leftrightarrow x+2=4+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow x^3-2x^2-4x-1=0$

$\Leftrightarrow(x+1)(x^2-3x-1)=0\Leftrightarrow x=-1\vee x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$. So sánh với điều kiện suy ra phương trình có hai nghiệm là $x=-1; x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Bài 9. Giải phương trình sau : $\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{2x-1}-3\right)=4$

<u>Lời giải :</u>

Điều kiện : $x\geq\frac{1}{2}$.

Để phương trình có nghiệm thì $\sqrt{2x-1}-3>0\Leftrightarrow x>5$.

Khi đó xét hàm số $f(x)=\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{2x-1}-3\right)$ trên khoảng $(5,+\infty)$.

Ta có $f'(x)=\left(\frac{1}{2\sqrt{x+2}}+\frac{1}{2\sqrt{x+6}}\right)\left(\sqrt{2x-1}-3\right)+\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}}{\sqrt{2x-1}}>0$, nên hàm số đồng biến trên $(5,+\infty)$. Nhận thấy $f(7)=4$, do đó phương trình có nghiệm duy nhất $x=7$.

Bài 10. Giải phương trình sau : $2\sqrt{x-1}+3\sqrt{5-x}+3x^2-30x+71=0$

<u>Lời giải :</u>

Điều kiện : $1\leq x\leq 5$.

Khi đó phương trình tương đương với :

$2\sqrt{x-1}+3\sqrt{5-x}=-3(x-5)^2+4\leq 4$ (1)

Xét hàm số $f(x)=2\sqrt{x-1}+3\sqrt{5-x}$ liên tục và xác định trên $[1,5]$. Ta có

$f'(x)=\frac{2\sqrt{5-x}-3\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}.\sqrt{5-x}}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{29}{13}$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta lại có $f(1)=6,\ f(5)=4,\ f\left(\frac{29}{13}\right)=2\sqrt{13} \Rightarrow \min\limits_{x\in[1,5]} f(x)=f(5)=4$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $x=5$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$.

Bài 11. Giải phương trình sau : $4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}=x^2+8$

<u>Lời giải :</u>

Điều kiện : $-2\le x\le \frac{22}{3}$.

Khi đó phương trình tương đương với :

$$4\left(\sqrt{x+2}-2\right)+\left(\sqrt{22-3x}-4\right)=x^2-4$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(x-2)}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{3(2-x)}{\sqrt{22-3x}+4}=(x-2)(x+2)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x+2-\frac{4}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{3}{\sqrt{22-3x}+4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x+2-\frac{4}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{3}{\sqrt{22-3x}+4}=0(*) \end{array}\right.$$

Xét hàm số $f(x)=x+2-\frac{4}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{3}{\sqrt{22-3x}+4}$, ta có

$$f'(x)=1+\frac{2}{\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+2}+2\right)^2}+\frac{9}{\sqrt{22-3x}\left(\sqrt{22-3x}+4\right)^2}>0,\forall x\in\left(-2;\frac{22}{3}\right)$$

Nên hàm số đồng biến trên $\left[-2,\frac{22}{3}\right]$

Nhận thấy $f(-1)=0$, do đó phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x=-1$.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=-1; x=2$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 12. Giải phương trình sau : $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=x^2-x+1$.

<u>Lời giải</u> :

Điều kiện : $-2\le x\le 3$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}-x^2+x-1$ trên đoạn $\left[-2,3\right]$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}-\dfrac{1}{2\sqrt{3-x}}-2x+1$; $f''(x)=-\dfrac{1}{4\sqrt{(x+2)^3}}-\dfrac{1}{4\sqrt{(3-x)^3}}-2<0$. Do đó hàm số $f'(x)$ nghịch biến trên $(-2,3)$, do đó phương trình $f(x)=0$ có tối đa 2 nghiệm. Nhận thấy $x=2; x=-1$ thỏa mãn phương trình.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=-1; x=2$.

<u>Nhận xét :</u>

Bài toán này có thể giải bằng phương pháp trục căn thức

Bài 13. Giải phương trình : $\sqrt{x}=(1-x)^3+1$

<u>Lời giải :</u>

Điều kiện $x\ge 0$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x}-(1-x)^3-1$ trên đoạn $\left[0,+\infty\right)$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+3(1-x)^2>0,\forall x\in(0,+\infty)$. Do đó hàm số đồng biến trên đoạn $\left[0,+\infty\right)$.

Vậy nếu phương trình $f(x)=0$ có nghiệm thì đó là nghiệm duy nhất. nhận thấy $f(1)=0$. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 14. Giải phương trình : $13\sqrt{x^2-x^4}+9\sqrt{x^2+x^4}=16$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải :

Điều kiện : $|x| \le 1$

Khi đó phương trình tương đương với :

$$x^2\left(13\sqrt{1-x^2}+9\sqrt{1+x^2}\right)^2=256$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy sharvart ta có

$$\left(13\sqrt{1-x^2}+9\sqrt{1+x^2}\right)^2=\left(\sqrt{13}.\sqrt{13}\sqrt{1-x^2}+3\sqrt{3}.\sqrt{3}\sqrt{1+x^2}\right)^2$$

$$\le(13+27)\left(13\left(1-x^2\right)+3\left(1+x^2\right)\right)=40\left(16-10x^2\right)$$

Từ đó suy ra $VT \le 40x^2\left(16-10x^2\right)\le 4\left(\frac{16}{2}\right)^2=256=VP$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ

$$\begin{cases}\sqrt{1-x^2}=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{3}\\ 10x^2=16-10x^2\end{cases}\Leftrightarrow x=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Bài 15. Giải phương trình $\sqrt{x^4-5x^2+4}+2x=\sqrt{4x^4-16x^2}+\sqrt{x^2-1}$

Lời giải :

Điều kiện $x\ge 2; x\le -2$

- Với $x\ge 2$ phương trình tương đương với

$$\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)}+\sqrt{4x^2}=\sqrt{4x^2\left(x^2-4\right)}+\sqrt{x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-4}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{4x^2}\right)+\sqrt{4x^2}-\sqrt{x^2-1}=0$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{4x^2} - \sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2-4} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{5} > 2$

- Với $x \le -2$ khi đó phương trình tương đương với

$\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)} - \sqrt{4x^2} = \sqrt{4x^2\left(x^2-4\right)} + \sqrt{x^2-1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x^2-4} - 1\right) = \sqrt{4x^2}\left(\sqrt{x^2-4} + 1\right)$ (*)

Dễ thấy với $x \le -2$ thì Vế phải lớn hơn Vế trái, hay phương trình (*) vô nghiệm

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \sqrt{5}$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các phương trình, bất phương trình sau :

1.1. $\sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1} = 1$

1.2. $\left(3 + 4\sqrt{x^2+1}\right)\left(4x+15\right) = 16$

1.3. $\sqrt{2x\sqrt{5} - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} > \frac{9}{x}$

1.4. $\sqrt{x^2-2x+3} - \sqrt{x^2-6x+11} > \sqrt{3-x} - \sqrt{x-1}$

1.5. $\sqrt{2x^2+12x+6} - \sqrt{2x-1} \ge x+2$

1.6. $\sqrt{6\left(2-x\right)} + 2\sqrt{2\left(3-x\right)} = 6\sqrt{x^2-5x+6}$

1.7. $2x+3 = x^2 + \left(x-1\right)\sqrt[3]{3x^3+3}$

1.8. $\sqrt[6]{4x^2-1} + \sqrt{4x-1} = \sqrt[3]{1-\sqrt{4x-1}} + 1 - \sqrt{4x^2-1}$

PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HÓA

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Khi gặp một số bài toán mà biểu thức chứa căn thức, ta thường đổi biến số dưới dạng lượng giác như sau.

+ Nếu có chứa $\sqrt{a^2-x^2}$ thì đặt $x=a\sin t$ hoặc $x=a\cos t$.

+ Nếu có chứa $\sqrt{x^2-a^2}$ thì đặt $x=\dfrac{a}{\cos t}$ hoặc $x=\dfrac{a}{\sin t}$.

+ Nếu có chứa x^2+a^2 hoặc $\sqrt{x^2+a^2}$ thì đặt $x=a\tan t$.

+ Nếu có chứa $\sqrt{\dfrac{x+a}{a-x}}$ thì đặt $x=a\cos 2t$.

+ Nếu có chứa $\sqrt{(x-a)(b-x)}$ thì đặt $x=a+(b-a)\sin^2 t$.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải phương trình : $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+\sqrt{\dfrac{1-x^2}{3}}$

<u>Lời giải :</u>

Điều kiện : $|x|\le 1$.

Với $-1\le x\le 0$ thì $\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\le 0\Rightarrow VT\le 0, VP>0$, do đó phương trình không có nghiệm trên $[-1,0]$. Ta xét nghiệm của phương trình $x\in[0,1]$.

Đặt $x=\cos t, t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, khi đó phương trình trở thành :

$$\sqrt{1+\sqrt{1-\cos^2 t}}\left(\sqrt{(1+\cos t)^3}-\sqrt{(1-\cos t)^3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}+\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\sin t}\left(\left(\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}\right)^3-\left(\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}\right)^3\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin t$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\left(\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right)\left(\cos\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}\right)\left(1+\left(\cos\frac{t}{2}.\sin\frac{t}{2}\right)\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin t$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{6}\cos t\left(1+\frac{1}{2}\sin t\right)=2+\sin t\Leftrightarrow \cos t=\frac{1}{\sqrt{6}}\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Bài 2. Giải phương trình sau : $\sqrt{1-x^2}=\frac{x}{4x^2-1}$

<u>Lời giải :</u>

Điều kiện : $|x|\le 1, x\ne \pm\frac{1}{2}$.

Ta đặt $x=\cos t, t\in[0;\pi], t\ne\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}$

Khi đó phương trình trở thành :

$$\sqrt{1-\cos^2 t}=\frac{\cos t}{4\cos^2 t-1}\Leftrightarrow \sin t\left(4\cos^2 t-1\right)=\cos t\Leftrightarrow \sin t\left(3-4\sin^2 t\right)=\cos t$$

$$\Leftrightarrow \sin 3t=\cos t=\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3t=\frac{\pi}{2}-t+k2\pi\\ 3t=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\\ t=\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.$$

So sánh với điều kiện của t, suy ra $x=\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8},\frac{\pi}{4}$.

Vậy phương trình có ba nghiệm là $x=\cos\frac{\pi}{8}; x=\cos\frac{5\pi}{8}; x=\cos\frac{\pi}{4}$.

Bài 3. Giải phương trình : $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}=x\left(1+2\sqrt{1-x^2}\right)$

<u>Lời giải :</u>

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Điều kiện : $|x| \le 1$.

Để phương trình có nghiệm thì $x \ge 0$, do đó ta chỉ xét nghiệm phương trình $x \in [0,1]$.

Ta đặt $x = \cos t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, khi đó phương trình trở thành :

$$\sqrt{1+\sqrt{1-\cos^2 t}} = \cos t\left(1+2\sqrt{1-\cos^2 t}\right) \Leftrightarrow \sqrt{1+\sin t} = \cos t(1+2\sin t)$$

$$\Leftrightarrow 1+\sin t = \cos^2 t(1+2\sin t) \Leftrightarrow (1+\sin t)\big(1-(1-\sin t)(1+2\sin t)\big) = 0$$

$1-(1-\sin t)(1+2\sin t) = 0(*)$, do $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Phương trình (*) tương đương với :

$$2\sin^2 t - \sin t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin t = 0 \\ \sin t = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các phương trình, bất phương trình sau :

1.1. $\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} = 1-2x^2$

1.2. $\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right) = 2x$

1.3. $2\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} = \sqrt{a-x+\sqrt{x(a+x)}}$

1.4. $\sqrt{3+x} - \sqrt{6-x}\sqrt{(3+x)(6-x)} = 1$

1.5. $x^3 - 3x = \sqrt{x+2}$

MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH DẠNG ĐẶC BIỆT

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dạng 1: $a.A(x)+b.B(x)=\sqrt{A(x).B(x)}$.

Phương trình này được giải bằng cách chia hai vế phương trình cho $A(x)$ hoặc $B(x)\neq 0$.

Dạng 2: $\alpha u+\beta v=\sqrt{mu^2+nv^2}$.

Phương trình này được giải bằng cách chia hai vế phương trình cho u hoặc $v\neq 0$.

Dạng 3 : $\alpha\left(f(x)\right)^n+\beta=\gamma\sqrt[n]{ag(x)+b}$ ta đặt $\sqrt[n]{ag(x)+b}=f(y)$ và đưa về giải hệ đối xứng.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải phương trình sau: $2\left(x^2+2\right)=5\sqrt{x^3+1}$

Lời giải:

Điều kiện: $x\geq -1$.

Khi đó phương trình tương đương với: $2\left(x^2-x+1\right)+2\left(x+1\right)=5\sqrt{\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}$.

Nhận thấy $x=-1$, không là nghiệm của phương trình, nên chía hai vế phương trình cho $\left(x+1\right)$ ta được:

$2\dfrac{x^2-x+1}{x+1}+2=5\sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x+1}}$ (*), đặt $t=\sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x+1}}\geq 0$, khi đó (*) trở thành:

$$2t^2+2-5t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\ t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x+1}}=2\\ \sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x+1}}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 2. Giải phương trình sau: $x^2-3x+1=-\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4+x^2+1}$

Lời giải:

Ta có $\sqrt{x^4+x^2+1}=\sqrt{\left(x^2+1\right)^2-x^2}=\sqrt{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}$

Giả sử $x^2-3x+1=\alpha\left(x^2-x+1\right)+\beta\left(x^2+x+1\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=1\\-\alpha+\beta=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=2\\\beta=-1\end{cases}$

Khi đó phương trình trở thành:

$$-2\left(x^2-x+1\right)+\left(x^2+x+1\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)}$$

Đặt $u=\sqrt{x^2-x+1},v=\sqrt{x^2+x+1}$, khi đó phương trình trở thành:

$$-2u^2+v^2=-\frac{\sqrt{3}}{3}uv\Leftrightarrow\left(u-\frac{\sqrt{3}}{2}v\right)\left(u+\frac{\sqrt{3}}{3}v\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=\frac{\sqrt{3}}{2}v\\u=-\frac{\sqrt{3}}{3}v\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2-x+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{x^2+x+1}\\\sqrt{x^2-x+1}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^2+x+1}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{7\pm3\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=\frac{7\pm3\sqrt{5}}{2}$.

Bài 3. Giải phương trình sau: $\frac{2}{3}\sqrt{4x+1}-9x^2+26x+\frac{37}{3}=0$

Lời giải:

Điều kiện: $x\ge-\frac{1}{4}$.

Khi đó phương trình tương đương với: $\frac{2}{3}\sqrt{4x+1}=\left(3x-4\right)^2-2x-\frac{11}{3}(*)$

Đặt $\sqrt{4x+1}=3y-4, y\ge\frac{4}{3}$, khi đó kết hợp với (*) ta có hệ phương trình:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases}(3y-4)^2=4x+1\\(3x-4)^2=\frac{2}{3}(3y-4)+2x+\frac{11}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(3y-4)^2=4x+1\\(x-y)(9x+9y-22)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(3y-4)^2=4x+1\\\left[\begin{array}{l}x=y\\9x+9y-22=0\end{array}\right.\end{cases}$$

Giải hệ này ta được các nghiệm thỏa mãn điều kiện là $x=\frac{14+\sqrt{61}}{9};x=\frac{12-\sqrt{53}}{9}$.

Bài 4. Giải phương trình: $\sqrt[3]{3x-5}=8x^3-36x^2+53x-25$

Lời giải:

Phương trình tương đương với: $\sqrt[3]{3x-5}=(2x-3)^3-x+2$ (*)

Nên ta đặt $\sqrt[3]{3x-5}=2y-3$ (**), kết hợp với (*) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}(2y-3)^3=3x-5\\(2x-3)^3=x+2y-5\end{cases}$$

Trừ theo vế hai phương trình trong hệ ta được:

$$2(x-y)\left((2x-3)^2+(2x-3)(2y-3)+(2y-3)^2\right)=2(y-x)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\ (i)\\(2x-3)^2+(2x-3)(2y-3)+(2y-3)^2+1=0\ (ii)\end{array}\right.$$

Dễ thấy phương trình (ii) vô nghiệm, do

$$(2x-3)^2+(2x-3)(2y-3)+(2y-3)^2+1=\left(2x-3+\frac{1}{2}(2y-3)\right)^2+1+\frac{3}{4}(2y-3)^2>0$$

Thay $x=y$ ở (i) vào (**) ta được:

$$(2x-3)^3=3x-5\Leftrightarrow(x-2)\left(8x^2-20x+11\right)=0\Leftrightarrow x=2\vee x=\frac{5\pm\sqrt{3}}{4}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các phương trình, bất phương trình sau:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.1. $2x^2+5x-1=7\sqrt{x^3-1}$

1.2. $x^3-3x^2+2\sqrt{(x+2)^3}-6x=0$

1.3. $2(x^2-3x+2)=3\sqrt{x^3+8}$

Đáp số: $x=3\pm\sqrt{13}$

1.4. $\sqrt[3]{3x+4}=x^3+3x^2+x-2$

1.5. $2x^3-x^2-3x+1=\sqrt{x^5+x^4+1}$

1.6. $\sqrt[3]{81x-8}=x^3-2x^2+\frac{4}{3}x-2$

1.7. $x^2-2x=2\sqrt{2x-1}$

1.8. $2x^2-6x-1=\sqrt{4x+5}$

1.9. $8x^3-4x-1=\sqrt[3]{6x+1}$

1.10. $7x^2-13x+8=2x^2\sqrt[3]{x(1+3x-3x^2)}$

1.11. $2(x^2+2x+3)\le 5\sqrt{x^3+5x^2+3x+2}$

1.12. $8x^2-13x+7=\left(1+\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{(x+1)(2x-1)+x^2-x-1}$

1.13. $x^3-\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+x}}=6$

1.14. $10\sqrt[3]{x^3+1}=3(x^2+2)$

Đặt $u=\sqrt{x+1}, v=\sqrt{x^2-x+1}$

Đáp số $x=5\pm\sqrt{33}$

1.15. $10\sqrt{x^3+8}=3(x^2-x+6)$

Đáp số: $x=\frac{11\pm\sqrt{177}}{2}$

1.16. $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x^2+4x+1}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Đáp số: $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Giải các phương trình, bất phương trình sau:

1. $x^2+3x+1=(x+3)\sqrt{x^2+1}$

2. $\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}}=x-2$

3. $x-\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x}+\sqrt{x^2-x}=0$

4. $\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x^2-1}=1$

5. $\sqrt{x+\sqrt{x^2-x+1}}-\sqrt{x+1+\sqrt{x^2+x+1}}=1$

6. $\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}=4-\left(x+\frac{1}{x}\right)$

7. $\sqrt{x}>1+\sqrt[3]{x-1}$

8. $(x-1)\sqrt{2x-1}\le 3(x-1)$

9. $4\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}<2x+\frac{1}{2x}+2$

10. $x^2-1\le 2x\sqrt{x^2+2x}$

11. $x-1\ge x\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\right)+\sqrt{x^2-x}$

12. $(4x-1)\sqrt{x^3+1}\le 2x^3+2x+1$

13. $\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2-6x+11}>\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}$

14. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-1}\ge (x+1)(3-x)$

15. $\sqrt{x+1}\le 1-2x+x^2-x^3$

16. $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}\le 2$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

17. $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1$

18. $\sqrt{1-x}=\sqrt{6-x}-\sqrt{-5-2x}$

19. $\sqrt[3]{x+6}+x^2=7-\sqrt{x-1}$

20. $\left(x^2-4x\right)\sqrt{2x^2-3x-2}\geq 0$

21. $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}}=x-\dfrac{1}{2}$

22. $x^2-4x+3=\sqrt{x+5}$

23. $x^3+x^2-3x-1=2\sqrt{x+2}$, $x\in\left[-2,2\right]$

24. $x^4+2x^3+2x^2-2x+1=\left(x^3+x\right)\sqrt{\dfrac{1-x^2}{x}}$

25. $x+\sqrt{4-x^2}=2+x\sqrt{4-x^2}$

26. $\sqrt{3x^3+2x^2+2}+\sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}=2x^2+2x+2$

27. $2\sqrt[3]{2x-1}=27x^3-27x^2+13x-2$

28. $\sqrt[3]{\dfrac{x^9-9x^2+1}{3}}=2x+1$

29. $x-1+\sqrt{x+1}+\sqrt{2-x}=x^2+\sqrt{2}$

30. $\dfrac{\sqrt{x^2-x+2}}{1+\sqrt{-x^2+x+2}}-\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{1+\sqrt{-x^2-x+4}}=x^2-1$

31. $2012^x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=1$

32. $2x^2\sin x+x\cos x+\sqrt[3]{2x+1}=x^3-x^5+x+1$

33. $2\sqrt{\left(2-x\right)\left(5-x\right)}=x+\sqrt{\left(2-x\right)\left(10-x\right)}$

34. $\left(x-3\right)\sqrt{x^2-4}\leq x^2-9$

35. $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\dfrac{5}{\sqrt{x-3}}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

36. $\dfrac{\sqrt{51-2x-x^2}}{1-x}\le 1$

37. $\sqrt[3]{\dfrac{x^3+1}{x+3}}+\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x+3}$

38. $\sqrt[3]{x^2-2}=\sqrt{2-x^3}$

39. $13\sqrt{x-1}+9\sqrt{x+1}=6x$

40. $\sqrt{5x-1}+\sqrt[3]{9-x}=2x^2+3x-1$

41. $(x-2)\sqrt{x-1}-\sqrt{2}x+2=0$

42. $2x+\dfrac{x-1}{x}=\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+3\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}$

43. $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x(1-x)^2}+\sqrt[4]{(1-x)^3}=\sqrt{1-x}+\sqrt[4]{x^2(1-x)}+\sqrt[4]{x^3}$

44. $\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[6]{x^2-1}$

45. $\sqrt[3]{x^2+4}+\sqrt{x-1}+2x-3$

46. $\sqrt{x^2+15}+2=3\sqrt[3]{x}+\sqrt{x^2+8}$

47. $\sqrt[3]{7x+1}-\sqrt[3]{x^2-x-8}-\sqrt[3]{x^2-8x+1}=2$

48. $\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{2x-9}-\sqrt[3]{4x-3}=0$

49. $\sqrt{\dfrac{7}{4}\sqrt{x}-1+x^2}=(1-\sqrt{x})^2$

50. $1+\dfrac{2}{3}\sqrt{x-x^2}=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$

51. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}=\dfrac{(2x-1)^2}{2}$

52. $x^2+2x-1-3x\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=0$

53. $2(x^2-3x+2)=\sqrt[3]{x^3+8}$

54. $\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2}=\dfrac{x+3}{5}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

55. $2\sqrt{3x+3}=x^2+9x+20$

56. $\sqrt{2x^2+16x+18}+\sqrt{x^2-1}=2x+4$

57. $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$

58. $\sqrt{2x^2+13}=4x-2+\sqrt{2x^2+7}$

59. $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}=\dfrac{2x+x^2}{1+x^2}$

60. $x^2+\sqrt[3]{x^4-x^2}=2x+1$

61. $\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=3x$

62. $3x^2+7x+8-(4x+2)\sqrt{x+8}=0$

63. $\dfrac{x+2+x\sqrt{2x+1}}{x+\sqrt{2x+1}}=\sqrt{x+2}$

64. $\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}\right)\left(x^2+\sqrt{x^2+4x+3}\right)=2x$

65. $25x+9\sqrt{9x^2-4}=\dfrac{2}{x}+\dfrac{18x}{x^2+1}$

66. $\sqrt{x^2+1}+\dfrac{x^2+1}{2x}=\dfrac{\left(x^2+1\right)^2}{2x\left(1-x^2\right)}$

67. $10x^2+3x+1=(6x+1)\sqrt{x^2+3}$

68. $x^2\sqrt{x}+(x-5)^2\sqrt{5-x}=11\left(\sqrt{x}+\sqrt{5-x}\right)$

69. $15x^2+2(x+1)\sqrt{x+2}+5x-2=0$

70. $2x+1+x\sqrt{x^2+2}+(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}=0$

71. $x^3+3x^2+4=4x\sqrt{x+3}$

72. $\sqrt{2x^2+2x}+(x-1)\sqrt{x}=x+1$

73. $4\sqrt{1-x}-6=x-3\sqrt{1-x^2}+5\sqrt{1+x}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

74. $2\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}}+x^2-4=\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$

75. $4+2\sqrt{1-x}=-3x+5\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}$

76. $2\sqrt{x^2-7x+10}=x+\sqrt{x^2-12x+20}$

77. $(x+4)^2-6\sqrt{x^3+3x}=13$

78. $x^3+6x^2-2x+3=(5x-1)\sqrt{x^3+3}$

79. $x^2+x-1=(x+2)\sqrt{x^2-2x+2}$

80. $\sqrt{x^2+x-6}+3\sqrt{x-1}-\sqrt{3x^2-6x+19}=0$

81. $(x^2-6x+11)\sqrt{x^2-x+1}=2(x^2-4x+7)\sqrt{x-2}$

82. $2x+\sqrt{1+x^2}=\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{1-x^2}$

83. $x^3+3x^2-3\sqrt[3]{3x+5}=1-3x$

84. $\sqrt[3]{x^2+4}=\sqrt{x-1}+2x-3$

85. $\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt{3x^3-2}=3x-2$

86. $\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=2x$

87. $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{-x^2+x+1}=x^2-x+2$

88. $3\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)=x\left(1+3x+8\sqrt{2x^2+1}\right)$

89. $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}=\frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+6}}$

90. $\sqrt{1-x^2}+2\sqrt[3]{1-x^2}=3$

91. $\sqrt{4x^2+5x+1}-2\sqrt{x^2-x+1}=9x-3$

92. $\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}=\sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}}+\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

93. $\sqrt{8+x^3}+\sqrt{64-x^3}=x^4-8x^2+28$

94. $\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}=4-\left(x+\frac{1}{x}\right)$

95. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x^3+x^2+x+1}=1+\sqrt{x^4-1}$

96. $2x+\frac{x-1}{x}=\sqrt{1-\frac{1}{x}}+3\sqrt{x-\frac{1}{x}}$

97. $x+\sqrt{x-1}\geq 3+\sqrt{2\left(x^2-5x+8\right)}$

98. $x+\frac{1}{x}+\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}=4$

99. $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}\geq\sqrt{3x^2+4x+1}$

Giải các phương trình, bất phương trình sau:

1.1. $x^3-3x+1=\sqrt{8-3x^2}$

1.2. $\frac{\sqrt{3+3x}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{3+3x}-\sqrt{3-x}}\geq\frac{4}{x}$

1.3. $\sqrt{\frac{x}{2}-\frac{22}{21}}-\sqrt[3]{x^3-3x^2+\frac{23}{7}}=1$

1.4. $\sqrt{3x^2+\frac{2}{x^2}+4}\leq x+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$

1.5. $7\sqrt{3x-7}+\left(4x-7\right)\sqrt{7-x}=32$

1.6. $\sqrt[3]{7x-8}+\sqrt{\frac{7-2x^2}{6}}=x$

1.7. $\sqrt[3]{3x^2-3x+3}-\sqrt[3]{\frac{x^3}{3}-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$

1.8. $\sqrt{2+2x}\leq 2\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{\frac{3x-1}{3x+1}}\right)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.9. $x^3-\sqrt[3]{x+2\ln x}-\frac{2}{3}\ln\left(x+2\ln x\right)=0$

1.10. $3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+\left(4x+2\right)\left(1+\sqrt{1+x+x^2}\right)=0$

1.11. $2\left(x-2\right)\left(\sqrt{3}x+5+2\sqrt{2x-5}\right)=3x-1$

1.12. $x^3-3x^2+2\sqrt{\left(x+2\right)^3}-6x\geq 0$

1.13. $4\sqrt{17x+53}-12x<\left(2\sqrt{x+5}+1\right)^2+27$

1.14. $\sqrt{1+x^2+x^4}+x=\sqrt{x-x^3}$

1.15. $2\left(2\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)-\sqrt{1-x^4}=3x^2+1$

1.16. $\sqrt{20x^2+80x+15}\leq 2x+1+4\sqrt{3x+5}$

1.17. $\sqrt{x^4+3x^2}+\sqrt{-x}=x^2-2x$

1.18. $2x+1+x\sqrt{x^2+2}+\left(x+1\right)\sqrt{x^2+2x+3}=0$

1.19. $\sqrt{x-3}+x<\sqrt{2\left(x^2-9x+22\right)}+5$

1.20. $\sqrt{x^4+20}-\sqrt{x^4+9}=x^3-7$

1.21. $\sqrt{-x^3+2x}+2>\sqrt{-6x+4}$

1.22. $\left(x^2-6x+11\right)\sqrt{x^2-x+1}=2\left(x^2-4x+7\right)\sqrt{x-2}$

Giải các phương trình, bất phương trình sau:

1.1. $\sqrt{3x^3+2x^2+2}+\sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}=2\left(x^2+x+1\right)$

1.2. $3x^3-x^2+3+\sqrt{x^4+3x^3+3}=0$

1.3. $\sqrt{x^3-2x+5}+\sqrt{24x-23}=\frac{5x^2+4}{3}$

1.4. $\sqrt{x^5+x^3+x}\leq\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}-\sqrt{x^2\left(x^2-x+1\right)}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.5. $x^2+x+1=(x+1)\sqrt{9-x^2}$

1.6. $8\sqrt{\dfrac{2x-3}{x+1}}+3\ge 6\sqrt{2x-3}+\dfrac{4}{\sqrt{x+1}}$

1.7. $\sqrt{8-x^2}+\sqrt{\dfrac{x^2-2}{2x^2}}=5-\dfrac{1+x^2}{x^2}$

1.8. $\sqrt{x+\sqrt{x^2-4x+5}}-\sqrt{2x+1+\sqrt{4x^2-4x+2}}=x+1$

1.9. $\sqrt{\dfrac{5}{4}-x^2+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{\dfrac{5}{4}-x^2-\sqrt{1-x^2}}=x+1$

1.10. $\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt{(x+2)^3}=x^3+x-1$

1.11. $x^4-2x^3+x=\sqrt{2(x^2-x)}$

1.12. $\sqrt{4x^2-1}+\sqrt{x}=\sqrt{2x^2-x}+\sqrt{2x+1}$

1.13. $\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=1$

1.14. $(x+2)\sqrt{1-x}\ge x^4-x^3+5x-2$

1.15. $\left(4x^2-10x+7\right)\left(\sqrt[3]{(6x-4)^2}-\sqrt[3]{6x-4}+1\right)=9$

1.16. $\sqrt{6}\left(x^2-3x+1\right)+\sqrt{x^4+x^2+1}\le 0$

1.17. $3\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)=x\left(1+3x+8\sqrt{2x^2+1}\right)$

1.18. $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\sqrt{x^2+3x+\dfrac{1}{9}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x$

1.19. $\sqrt{5x+6}+\sqrt{x-1}=\sqrt{\dfrac{x^3+8}{x-1}}+\sqrt{\dfrac{x^3+8}{5x+6}}$

1.20. $3\left(x^2-x+1\right)=8\sqrt{x\left(x^2+1\right)}$

1.21. $\sqrt{12x-8}+\sqrt{8x+28}=\sqrt{2x^2+22x+40}$

1.22. $\sqrt{x+2}+\sqrt{5x+6}+2\sqrt{8x+9}=4x^2$

1.23. $2x-1=-3\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.24. $\sqrt{x^2-x-6}+3\sqrt{x}=\sqrt{6\left(x^2+5x-2\right)}$

1.25. $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}-2\sqrt{x(1-x)}-2\sqrt[4]{x(1-x)}=-1$

1.26. $\dfrac{x^2-x}{\sqrt{x^4+3x^2}-2x}\le 1$

1.27. $\dfrac{\sqrt{x^2-x-6}+7\sqrt{x}-\sqrt{6\left(x^2+5x-2\right)}}{x+3-\sqrt{2\left(x^2+10\right)}}\le 0$

1.28. $15\sqrt{x^3+x}=x^2+14\sqrt[3]{x^4+x^2}+1$

1.29. $7x\sqrt{x+2}=12x+\sqrt{22-3x}$

1.30. $\sqrt[3]{7x-8}+1\ge\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2$

1.31. $\sqrt[3]{24x-11}-16x\sqrt{2x-1}-1=0$

1.32. $x+\sqrt{x}+3\sqrt{2x-x^2}=4+\sqrt{2-x}$

1.33. $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}=x^2-x+2$

1.34. $12\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+1}\ge 3(x+5)$

1.35. $\sqrt{x}+\sqrt[4]{17-x^2}=3$

1.36. $1+x-2x^2=\sqrt{4x^2-1}-\sqrt{2x+1}$

1.37. $4x-x^2=\dfrac{3\sqrt{3}}{1+\sqrt{x^4-8x^3+16x^2+1}}$

1.38. $4x^2+12x\sqrt{x+1}=27(x+1)$

1.39. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x^3+1}+1=\sqrt[3]{(x+1)\sqrt[3]{3x^3+3}}+x\sqrt[3]{3x^3+3}$

1.40. $x^2=\sqrt{x^3-x^2}+\sqrt{x^2-x}$

1.41. $2\sqrt{2}\left(\sqrt{x-\dfrac{1}{2}}+\dfrac{x+1}{4}\right)=\sqrt{x^2+18x-7}$

1.42. $\sqrt[6]{1-\sqrt{x^4-x^2}}+\sqrt[3]{\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}+1}=\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.43. $(3x+1)\sqrt{2x^2-1}=5x^2+\frac{3}{2}x-3$

1.44. $\sqrt{4x^2+5x+1}-2\sqrt{x^2-x+1}=9x+1$

1.45. $(x+3)\sqrt{-x^2-8x+48}=28-x$

1.46. $2+\sqrt{x}=\left(3+\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\right)$

1.47. $(x+2)\left(\sqrt{2x+3}-2\sqrt{x+1}\right)+\sqrt{2x^2+5x+3}-1\geq 0$

1.48. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-11x+33}+\sqrt{3x-5}$

1.49. $4x^2+3x+3=4x\sqrt{x+3}+2\sqrt{2x-1}$

1.50. $\left(19+10x-4x^2\right)\sqrt{x^2+5x+24}+\left(62+25x-27x^2\right)\sqrt{3x^2-x+1}=0$

1.51. $\dfrac{x^3-2x}{x^2-1-\sqrt{x^2-1}}=2\sqrt{6}$

1.52. $x=\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$

1.53. $8x^2+\sqrt{\dfrac{1}{x}}=\dfrac{5}{2}$

1.54. $\left(\sqrt{x+1}+2\right)^3=\sqrt{x^3+2}$

1.55. $(4x+2)\sqrt{x+1}-(4x-2)\sqrt{x-1}=9$

1.56. $5x^2+28x+24=\left(3x^2+4x+8\right)\sqrt{2x+1}$

1.57. $x\sqrt{x+1}=\sqrt{2x+5}+x+3$

1.58. $\sqrt{x}-2\sqrt{5x-x^2+\sqrt{5-x}}=1$

1.59. $\sqrt{2-x^2}+\sqrt{\dfrac{2x^2-1}{x^2}}=\dfrac{-x^2+4x-1}{x}$

1.60. $4x^2-4x-10=\sqrt{8x^2-6x-10}$

1.61. $\sqrt{x+5}-\sqrt{9-7x}-x^3+3x^2+51x+49=0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.62. $\sqrt{2x^2+x+6}+\sqrt{x^2+x+2}=x+\frac{4}{x}$

1.63. $\sqrt{x^2+x-6}+3\sqrt{x-1}=\sqrt{3x^2-6x+19}$

1.64. $\sqrt{4x^2-x+10}+2x=3\sqrt[3]{2x^2-x^3}+\sqrt{9x^2-4x+4}$

1.65. $\sqrt{x^2-x+1}>2x-1+\frac{1}{x}$

1.66. $5+8\sqrt{1-x}=3x+4\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x^2}\right)$

1.67. $\sqrt{5x^2+4x}+5\sqrt{x}=\sqrt{x^3-3x^2-18}$

1.68. $3\left(3x-x^2-1\right)\sqrt{x^2-2x}=x^3-4x^2+4x-1$

1.69. $x^3-1=\sqrt{x}\left(-3x^2+5x-3\right)$

1.70. $\left(2x+1\right)\sqrt{x-1}+\sqrt{2x^2-3x+1}\geq\sqrt{\left(2x-1\right)^3}+1$

1.71. $x^3-3x^2-8x+40-8\sqrt[4]{4x+4}=0$

1.72. $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x+7}=\sqrt[4]{x+80}$

1.73. $\sqrt{x^2+1}=x^2+x+\sqrt{2x^2+x+1}$

1.74. $2x+7=\sqrt[4]{4x-3}+4\sqrt{x+3}$

1.75. $\sqrt{5-\sqrt{x+1+\sqrt{2x^2+x+3}}}=1$

1.76. $\frac{2x-8}{\sqrt{6-x}}=3\sqrt{x-4}-\sqrt{6-x}$

1.77. $\sqrt{17+5\sqrt{4x^2-16}}+x^2\sqrt{7-x}=3$

1.78. $\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x}-x\sqrt{x^2+1}=\frac{\sqrt{2}\left(7x^2-x+4\right)}{4}$

1.79. $\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+...+2\sqrt{3x}}}}=x$

1.80. $\left(1+x+\sqrt{x^2-1}\right)^{2012}+\left(1+x-\sqrt{1-x^2}\right)^{2012}=2^{2013}$

1.81. $6\left(x-1\right)\sqrt{x+1}+\left(x^2+2\right)\left(\sqrt{x-1}+3\right)=x\left(x^2+2\right)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.82. $13\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\sqrt{x^2+4}+9\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}-\sqrt{x^2+4}=0$

1.83. $(x-1)^2-\frac{x+1}{x-3}\sqrt{\frac{x-3}{x+1}}=4$

1.84. $\left(x-\frac{2x+4}{2x-5}\right)\sqrt{10x-3x^2-3}\geq 0$

1.85. $(2x+1)^2-2.\frac{x+2}{x-4}.\sqrt{\frac{x-4}{x+2}}=9$

1.86. $x-1+\sqrt[3]{\frac{7}{4}-x^3}=\sqrt{4x^2-4x-1}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam